Moderné vzdelávanie pre vedomostnú spoločnosť / Projekt je spolufinancovaný zo zdrojov EÚ

Európska únia
Európsky sociálny fond

Pavel Mäsiar

Príprava žiakov ZŠ a nižších ročníkov osemročných gymnázií na matematickú olympiádu

2013

Publikácia bola vydaná a financovaná z prostriedkov ESF
v rámci národného projektu Profesijný a kariérový rast
pedagogických zamestnancov.
ITMS kód projektu 26120130002
ITMS kód projektu 26140230002

METODICKO-PEDAGOGICKÉ CENTRUM

Príprava žiakov ZŠ a nižších ročníkov osemročných gymnázií na matematickú olympiádu

Pavel MÄSIAR

Bratislava 2013

Obsah

Úvod

Metodicko-pedagogické centrum má pre učiteľov matematiky v základných školách a v nižších ročníkoch osemročných gymnázií akreditovaný program kontinuálneho vzdelávania v rozsahu 20 vyučovacích hodín s názvom *Starostlivosť o nadaných žiakov pomocou matematickej olympiády v kategóriách Z4 až Z9*.

Hlavným cieľom, ktorý sa realizáciou programu má dosiahnuť, je pripraviť učiteľov matematiky na prácu s talentovanými žiakmi s využitím úloh aktuálneho ročníka matematickej olympiády. V rámci prípravy žiakov sa môžu využívať aj úlohy z predchádzajúcich ročníkov matematickej olympiády. Samozrejme, učitelia môžu využiť aj iné vhodné úlohy, najmä ak vidia ich súvislosť s témami úloh aktuálneho ročníka matematickej olympiády. Samotný program je v plnom znení uvedený na www.mpc-edu.sk v ponuke akreditovaných vzdelávacích programov MPC.

Kým program prešiel procesom akreditácie, *Slovenská komisia matematickej olympiády* zrušila od školského roka 2011/2012 kategóriu Z4, ale jedným dychom nabáda školy, aby naďalej organizovali matematickú súťaž pre svojich šikovných štvrtákov.

Keďže ani doteraz žiaci štvrtých ročníkov nesúťažili s rovesníkmi z iných škôl (kategória Z4 mala len domáce a školské kolo), v podstate sa veľa nezmenilo. Škola si môže pripraviť a realizovať matematickú súťaž typu matematickej olympiády aj pre štvrtákov, teda kategória Z4 nie je úplne stratená.

Učitelia môžu vzdelávací program absolvovať v dvoch režimoch:

1. Absolvovaním prezenčnej aj dištančnej časti podľa akreditovaného programu končiaceho záverečnou prezentáciu jednotlivých účastníkov pred trojčlennou skúšobnou komisiou. Tento režim je vhodný pre všetkých, ktorí nie sú začínajúci učitelia a majú aspoň 6 mesiacov pedagogickej praxe.
2. Overením svojich profesijných kompetencií v zmysle § 35 ods. 6 zákona č. 317/2009 Z. z. v znení neskorších predpisov. V tomto režime nie je potrebné zúčastniť sa podujatí prezenčnej časti programu, treba však vypracovať výstupy dištančnej časti (podľa zadania lektora) a absolvovať záverečnú prezentáciu rovnako, ako v prípade režimu č. 1. Je vhodný pre všetkých, ktorí majú aspoň 3 roky pedagogickej praxe.

Po úspešnom absolvovaní programu kontinuálneho vzdelávania získajú absolventi osvedčenie s uvedením počtu získaných kreditov (7 kreditov).

Prihlášky na vzdelávanie (pre každý z režimov zvlášť) sú k dispozícii na www.mpc-edu.sk. Vzdelávanie sa otvára podľa počtu prijatých prihlášok.

K obsahu vzdelávacieho programu

Matematická olympiáda (MO) je pomerne známa matematická súťaž.
V rámci akreditovaného programu kontinuálneho vzdelávania *Starostlivosť o nadaných žiakov pomocou matematickej olympiády v kategóriách Z4 až Z9* si učitelia majú možnosť pripomenúť organizačný poriadok matematickej olympiády, jej význam, ciele, ale aj históriu či už v národnom, alebo medzinárodnom meradle. Samozrejme, najžiadanejším dôsledkom absolvovania tohto akreditovaného programu učiteľmi matematiky je následná účasť žiakov v jednotlivých kolách matematickej olympiády, ktorú v školách zabezpečujú predovšetkým samotní učitelia matematiky.
V školách, kde sa učitelia venujú žiakom aj prostredníctvom matematických súťaží vrátane matematickej olympiády, sa ľahšie dajú objaviť talentovaní žiaci na matematiku. Program môže pomôcť niektorým učiteľom zvyknúť si na pravidelnú metodickú analýzu úloh MO, ale aj na tvorbu gradovaných sérií matematických úloh, riešenie ktorých má ich žiakov pripraviť na samostatné riešenie úloh matematickej olympiády. Samozrejme, uvedomujeme si, že samotná aktívna účasť žiakov v matematickej olympiáde nie je cieľom, je len prostriedkom na ceste k lepším matematickým poznatkom našich žiakov, na vzbudenie ich záujmu o riešenie matematických úloh a rozvoj ich logického myslenia.

Každý nový ročník MO prináša nové, aktuálne úlohy v jednotlivých kolách. Metodický rozbor riešení úloh domáceho kola, tvorba gradovaných sérií úloh (návodné a motivačné úlohy) pre žiakov v rámci ich prípravy na samostatné riešenie súťažných úloh, následná analýza súťažných úloh, to je každoročná príležitosť na oživenie vyučovania matematiky alebo na náplň činnosti matematických krúžkov.

Dištančná časť vzdelávania v rámci programu kontinuálneho vzdelávania spočíva v tvorivej práci učiteľov pri príprave svojich žiakov na súťaženie, konkrétne ide o vytváranie návodných a motivačných úloh na riešenie súťažných úloh s dôrazom na úlohy domáceho kola.
Výsledkom tejto práce sú vytvorené úlohy, ktoré budú súčasťou záverečnej prezentácie pri ukončovaní vzdelávania.

Teraz uvedieme ukážky toho, ako môžu učitelia postupovať pri tvorbe úloh v rámci prípravy svojich žiakov na MO.

Zjednodušenie úlohy, strapce úloh

Zoberme si jednu z domácich úloh (úloh domáceho kola) kategórie Z5 zo 62. ročníka MO 2012/2013.

Ú1.

Pat napísal na tabuľu čudný príklad: 550 + 460 + 359 + 340 = 2 012. Mat to chcel napraviť, preto pátral po neznámom čísle, ktoré by pripočítal ku každému z piatich uvedených čísel, aby bol potom príklad vypočítaný správne. Aké to bolo číslo? (L. Hozová)

Ak by sa stalo, že žiaci nemajú chuť púšťať sa do riešenia takejto úlohy, resp. nevedia ju vyriešiť, učiteľ veľmi ľahko môže vymyslieť jednoduchší variant úlohy. (Pôvodnú úlohu domáceho kola by mal žiak na súťažné účely vypočítať sám.)

Ú2.

Pat napísal na tabuľu čudný príklad: 55 + 46 + 59 = 172. Mat to chcel napraviť, preto pátral po neznámom čísle, ktoré by pripočítal ku každému zo štyroch uvedených čísel, aby bol potom príklad vypočítaný správne. Aké to bolo číslo?

Dá sa urobiť aj trochu iná úloha.

Ú3.

Pat napísal na tabuľu čudný príklad: 55 + 46 + 59 = 175. Mat to chcel napraviť, preto pátral po neznámom čísle, ktoré by pripočítal ku každému z troch čísel (sčítancov) uvedených na ľavej strane pred znamienkom „=“, aby bol potom príklad vypočítaný správne. Aké to bolo číslo?

Z podobných úloh sa dá vytvoriť „strapec“ príbuzných úloh, ktoré sa potom dajú využiť na rôzne účely. Možno ich využiť na prípravu žiakov alebo aj do súťažného kola „kategórie Z4“, ktoré si škola môže pripraviť.

Zoberme si teraz prvú z úloh obvodného kola kategórie Z6 zo 61. ročníka MO 2011/2012.

1.

Danka a Janka dostali na narodeniny dve rovnako veľké biele kocky. Každá kocka bola zlepená zo 125 malých kociek, ako to vidíte na obrázku (tu na rozdiel od skutočného zadania pre žiakov obrázok neuvádzame).
Aby kocky rozoznali, dohodli sa, že ich omaľujú. Danka vzala štetec a tri celé steny svojej kocky omaľovala červenou farbou. Janka vzala štetec a tri celé steny svojej kocky ofarbila zelenou farbou.
Po čase sa dievčatá rozhodli, že každú z kociek rozkrájajú na jednotlivé malé kocky. Keď to urobili, zistili, že počet kociek, ktoré majú aspoň jednu stenu červenú, je iný, ako počet kociek, ktoré majú aspoň jednu stenu zelenú. Zistite, aký je rozdiel týchto počtov.

Súťažnej úlohe predchádzala úloha domáceho kola č. **Z6 - I - 3:** Na obrázku je stavba zlepená z rovnakých kociek. Stavba je vlastne veľká kocka s tromi rovnými tunelmi, ktorými sa dá pozerať skrz a ktoré majú všade rovnaký prierez.

Túto stavbu sme celú ponorili do farby. Koľko kociek, z ktorých je stavba zložená, má zafarbenú aspoň jednu stenu? (M. Krejčová)

Žiaci mali k dispozícii názorný obrázok, ktorý tu neuvádzame, ale dá sa nájsť napríklad na adrese:
www.iuventa.sk/files/documents/2_olympiady/mo/61.ročník/ulohy.a.riese-nia/m61dkzulpok12.pdf.

Za zmienku stojí uviesť aj úlohu domáceho kola č. **Z5 - I - 4:** Na obrázku je nakreslená stavba zlepená z rovnako veľkých kociek. Stavba je vlastne veľká kocka s tromi rovnými tunelmi, ktorými sa dá pozerať skrz a ktoré majú všade rovnaký prierez. Z koľkých kociek je stavba zlepená? (M. Krejčová)
Žiaci mali k dispozícii rovnaký obrázok ako v úlohe **Z6 - I - 3.**

Úlohy **Z5 - I - 4** a **Z6 - I - 3** boli veľmi vhodné na prípravu žiakov na prvú úlohu obvodného kola kategórie Z6.
Učiteľ dopredu nemôže vedieť, aké úlohy budú v obvodnom kole, na základe úloh domáceho kola však môže niečo tušiť. Môže preto vytvárať podobné úlohy k úlohám domáceho kola, vytvoriť akýsi strapec úloh na nejakú tému a pomocou nich môže svojich žiakov (okrem iného) lepšie pripraviť na súťažné úlohy ďalších kôl matematickej olympiády.
K úlohám **Z5 - I – 4** a **Z6 - I – 3** sa do strapca hodia napríklad aj úlohy a príklady na str. 21 až 24 zo staršej učebnice Mäsiar, P. – Koman, M. – Bureš, F.: *Matematika pre 6. ročník základnej školy,* ale aj úlohy či problémy na str. 63 až 68 publikácie Kopka, J.: *Hrozny problémů ve školské matematice.*

Ukážka gradovania úloh

Teraz uvedieme jednu gradovanú sériu úloh na deliteľnosť čísel. Ak by bolo treba riešiť (napríklad v rámci zadaní domáceho kola matematickej olympiády) poslednú z týchto úloh a bola by pre žiakov príliš ťažká, učiteľ môže tie predchádzajúce využiť ako návodné úlohy.

D1.

Nájdite aspoň jednu dvojicu jednociferných čísel, pre ktoré platí, že ich súčin je dvojnásobkom ich súčtu.

D2.

Nájdite všetky dvojice jednociferných čísel a, b, pre ktoré platí, že ich súčin je dvojnásobkom ich súčtu. (Pripúšťame aj možnosť, že $a = b$.)

D3.

Nájdite aspoň jednu trojicu jednociferných čísel, pre ktoré platí, že ich súčin je päťnásobkom ich súčtu.

D4.

Nájdite všetky trojice jednociferných čísel *a, b, c,* pre ktoré platí, že ich súčin je päťnásobkom ich súčtu.

Nájdite všetky trojice jednociferných čísel *a, b, c,* pre ktoré platí, že ich súčin je šesťnásobkom ich súčtu.

Stručne naznačíme riešenie úlohy D5:

Podľa zadania má platiť vzťah $a \cdot b \cdot c = 6\,(a + b + c)$, pričom *a, b, c* sú jednociferné čísla. Vidíme, že môžu nastať dva prípady:

1. Aspoň jedno z čísel *a, b, c* je 6. Po chvíľke uvažovania zistíme, že najviac jedno z nich môže byť 6. Vzhľadom na symetrické postavenie čísel môžeme uvažovať, že $a = 6$. Potom musí platiť, že $b \cdot c = 6 + b + c$, pričom *b* (teda ani *c*) nemôže byť 1 (vtedy by rovnosť neplatila). Tiež je zrejmé, že $b \cdot c$ je menej ako 24 (nakoľko *a* aj *b* môžu mať najvyššiu hodnotu 9). Po preskúmaní konečného počtu všetkých možností nájdeme jediné riešenie $a = 6, b = 2, c = 8$ (berieme do úvahy neusporiadané trojice čísel).
2. Ak ani jedno z čísel *a, b, c* nie je 6, potom aspoň jedno z nich je deliteľné dvoma a druhé je deliteľné troma. Nech $a = 2 \cdot k$ a $b = 3 \cdot m$, potom vzťah $a \cdot b \cdot c = 6\,(a + b + c)$ nadobudne tvar $k \cdot m \cdot c = 2k + 3m + c$. (Pritom *k* môže byť 1 alebo 2 alebo 4; *m* môže byť len 1 alebo 3, a to z dôvodu, že *a,* resp. *b* majú byť jednociferné čísla a vzhľadom na prvý prípad aj rôzne od 6 – ak by aspoň jedno bolo 6 ($k = 3$, resp. $m = 2$), tak to už máme prebádané.) Zostáva nám preskúmať 6 možností, ktoré obsahuje tabuľka.

k	1	1	2	2	4	4
m	1	3	1	3	1	3
a	2	2	4	4	8	8
b	3	9	3	9	3	9
c	-	~~5,5~~	7	~~6,5~~	-	-

Dostali sme teda dve riešenia 6, 2, 8 a 4, 3, 7. Ak by sme uvažovali o usporiadaných trojiciach *a, b, c,* dalo by to 12 riešení. Uvedený postup riešenia úlohy D5 by nemusel obsahovať dva prípady, ak by sme prvý prípad vzali do úvahy v rámci druhého ($k = 3$, resp. $m = 2$). Ak úlohy riešia žiaci, ich postup môže byť „kostrbatý“, napriek tomu nemá učiteľ predkladať hotové riešenia úloh, ale žiakov podporovať v ich tvorivej činnosti.

Ukážka obsahového prepojenia úloh v rámci jednotlivých kôl

Ako sme už uviedli, učiteľ nemôže na základe úloh domáceho kola vedieť, aké úlohy budú v ďalších kolách, no môže niečo tušiť. K tomu mu pomôžu aj skúsenosti z predchádzajúcich ročníkov matematickej olympiády. Teraz si na úlohách kategórie C v školskom roku 2011/2012 (61. ročník MO) ukážeme, ako môžu obsahovo súvisieť úlohy jednotlivých kôl.

Kategória C je síce určená pre stredoškolákov, ktorým zostávajú do maturity viac ako 3 roky, ale nie je nezvládnuteľná ani pre najšikovnejších žiakov základných škôl a nižších ročníkov osemročných gymnázií. Máme s tým dobré skúsenosti z vlastnej pedagogickej praxe. Nižšie uvedené úlohy kategórie C sú len príkladom na prepojenie úloh jednotlivých kôl matematickej olympiády, nemusia byť súčasťou dištančnej časti programu kontinuálneho vzdelávania, ani nechceme propagovať frontálne využívanie stredoškolskej matematickej olympiády v základných školách.

Ďalej uvedené úlohy, ale aj ich riešenia sú (dňa 23. 4. 2013 boli) dostupné na http://www.iuventa.sk/sk/Olympiady/Olympiady-a-sutaze/MO/61-rocnik-MO-2011-2012/Sutazne-ulohy-a-riesenia.alej.

Čitateľ si iste sám nájde súvislosti medzi úlohami jednotlivých kôl, ale upozorníme aspoň na vzťah úlohy **C - I - 3** k prvej úlohe školského kola.

Domáce kolo – 6 úloh:

C - I - 1

Nájdite všetky trojčleny $p(x) = ax^2 + bx + c$, ktoré dávajú po delení dvojčlenom $x + 1$ zvyšok 2 a po delení dvojčlenom $x + 2$ zvyšok 1, pričom $p(1) = 61$. (Jaromír Šimša)

C - I - 2

Dĺžky strán trojuholníka sú v metroch vyjadrené celými číslami. Určte ich, ak má trojuholník obvod 72 m a ak je najdlhšia strana trojuholníka rozdelená bodom dotyku vpísanej kružnice v pomere 3 : 4. (Pavel Leischner)

C - I - 3

Nájdite všetky trojice prirodzených čísel $a, b, c,$ pre ktoré platí množinová rovnosť $\{(a, b), (a, c), (b, c), [a, b], [a, c], [b, c]\} = \{2, 3, 5, 60, 90, 180\}$, pričom $(x; y)$ a $[x; y]$ označuje postupne najväčší spoločný deliteľ a najmenší spoločný násobok čísel x a y. (Tomáš Jurík)

C - I - 4

Reálne čísla a, b, c, d vyhovujú rovnici $ab + bc + cd + da = 16$.

a) Dokážte, že medzi číslami a, b, c, d sa nájdu dve so súčtom najviac 4.
b) Akú najmenšiu hodnotu môže mať súčet $a^2 + b^2 + c^2 + d^2$? (Ján Mazák)

C - I - 5

Daný je rovnoramenný trojuholník so základňou dĺžky a a ramenami dĺžky b. Pomocou nich vyjadrite polomer R kružnice opísanej a polomer r kružnice vpísanej tomuto trojuholníku.
Potom ukážte, že platí $R \geq 2r$, a zistite, kedy nastane rovnosť. (Leo Boček)

C - I - 6

Na hracej ploche *n x n* tvorenej bielymi štvorcovými políčkami sa Monika a Tamara striedajú v ťahoch jednou figúrkou pri nasledujúcej hre. Najskôr Monika položí figúrku na ľubovoľné políčko a toto políčko zafarbí namodro. Ďalej vždy hráčka, ktorá je na ťahu, urobí s figúrkou skok na políčko, ktoré je dosiaľ biele, a toto políčko zafarbí namodro. Pritom pod skokom rozumieme bežný ťah šachovým jazdcom, t. j. presun figúrky o dve políčka zvislo alebo vodorovne a súčasne o jedno políčko v druhom smere. Hráčka, ktorá je na rade a už nemôže urobiť ťah, prehráva. Postupne pre $n = 4; 5; 6$ rozhodnite, ktorá z hráčok môže hrať tak, že vyhrá nezávisle od ťahov druhej hráčky. (Pavel Calábek)

Úlohy školského kola kategórie C

1.

Nájdite všetky dvojice prirodzených čísel *a, b,* pre ktoré platí rovnosť množín
$\{a.[a; b], b.(a; b)\} = \{45, 180\}$,
pričom (x; y) označuje najväčší spoločný deliteľ a [x; y] najmenší spoločný násobok čísel *x* a *y*.

2.

Označme *S* stred základne *AB* daného rovnoramenného trojuholníka *ABC*. Predpokladajme, že kružnice vpísané trojuholníkom *ACS, BCS* sa dotýkajú priamky *AB* v bodoch, ktoré delia základňu *AB* na tri zhodné diely. Vypočítajte pomer $|AB| : |CS|$.

3.

Reálne čísla *p, q, r, s* spĺňajú rovnosti $p^2 + q^2 + r^2 + s^2 = 4$ a $pq + rs = 1$. Dokážte, že niektoré dve z týchto štyroch čísel sa líšia najviac o 1 a niektoré dve sa líšia najmenej o 1.

Úlohy krajského kola kategórie C

1.

Pre všetky reálne čísla x, y, z také, že $x < y < z$, dokážte nerovnosť:

$$x^2 - y^2 + z^2 > (x - y + z)^2.$$

2.

Janko má tri kartičky, na každej je iná nenulová cifra. Súčet všetkých trojciferných čísel, ktoré možno z týchto kartičiek zostaviť, je číslo o 6 väčšie ako trojnásobok jedného z nich. Aké cifry sú na kartičkách?

3.

Nech E je stred strany CD rovnobežníka $ABCD$, v ktorom platí:
$2|AB| = 3|BC|$. Dokážte, že ak sa dá do štvoruholníka $ABCE$ vpísať kružnica, dotýka sa táto kružnica strany BC v jej strede.

4.

Na tabuli je napísaných prvých n celých kladných čísel. Marína a Tamara sa striedajú v ťahoch pri nasledujúcej hre. Najskôr Marína zotrie jedno z čísel na tabuli. Ďalej vždy hráčka, ktorá je na ťahu, zotrie jedno z čísel, ktoré sa od predchádzajúceho zotretého čísla ani nelíši o 1, ani s ním nie je súdeliteľné. Hráčka, ktorá je na ťahu a nemôže už žiadne číslo zotrieť, prehrá. Pre $n = 6$ a pre $n = 12$ rozhodnite, ktorá z hráčok môže hrať tak, že vyhrá nezávisle od ťahov druhej hráčky.

Záver

Predpokladáme, že väčšina učiteľov dobre pochopí zámery programu kontinuálneho vzdelávania *Starostlivosť o nadaných žiakov pomocou matematickej olympiády v kategóriách Z4 až Z9* priamo z jeho textu.

Dúfame, že im tento skromný učebný text ešte viac priblíži jeho ciele, obsah a dištančnú časť a uistí učiteľov, že sa doň môžu úspešne zapojiť. Veríme, že stanovené (v programe uvedené) požiadavky na ukončenie programu nie sú pre učiteľov prekážkou, ktorú by nezvládli, a neodradia záujemcov od absolvovania programu.

Zoznam použitej literatúry

KOPKA, J. 1999. *Hrozny problémů ve školské matematice.* Ústí nad Labem : Univerzita J. E. Purkyně, 1999. ISBN 80-7044-247-6.

MÄSIAR, P., KOMAN, M., BUREŠ, F. 1991. *Matematika pre 6. ročník základnej školy.* Doplňujúci text pre triedy s rozšíreným vyučovaním matematiky a prírodovedných predmetov. Bratislava : Slovenské pedagogické nakladateľstvo, 1991. ISBN 80-08-01046-0.

Starostlivosť o nadaných žiakov pomocou matematickej olympiády v kategóriách Z4 až Z9 [online]. [cit. 23-04-2013]. Dostupné na internete: <http://www.mpc-edu.sk/vzdelavacia-cinnost/akreditovane-vzdelavacie-programy-v-plnom-zneni-k-22-4-2013>.

61. ročník MO, 2011/2012 [online]. [cit. 23-04-2013]. Dostupné na internete: <http://www.iuventa.sk/sk/Olympiady/Olympiady-a-sutaze/MO.alej>.

62. ročník MO, 2011/2012. [online]. [cit. 23-04-2013]. Dostupné na internete: <http://www.iuventa.sk/sk/Olympiady/Olympiady-a-sutaze/MO.alej>.

Názov:	**Príprava žiakov ZŠ a nižších ročníkov osemročných gymnázií na matematickú olympiádu**
Autor:	RNDr. Pavel Mäsiar
Recenzenti:	RNDr. Mária Rychnavská
	RNDr. Mária Nogová, PhD.
Vydavateľ:	Metodicko-pedagogické centrum v Bratislave
Odborná redaktorka:	Mgr. Terézia Peciarová
Grafická úprava:	Ing. Monika Chovancová
Vydanie:	1.
Rok vydania:	2013
Počet strán:	20
ISBN	**978-80-8052-487-6**