Moderné vzdelávanie pre vedomostnú spoločnosť / Projekt je spolufinancovaný zo zdrojov EÚ

RNDr. Beáta Vavrinčíková

Rozvíjanie priestorovej predstavivosti pomocou modelovania telies

Osvedčená pedagogická skúsenosť edukačnej praxe

Prešov
2014

Vydavateľ:	Metodicko-pedagogické centrum, Ševčenkova 11, 850 01 Bratislava
Autor OPS/OSO:	RNDr. Beáta Vavrinčíková
Kontakt na autora:	Gymnázium, Alejová 1, Košice beata.vavrincikova@gmail.com
Názov OPS/OSO:	Rozvíjanie priestorovej predstavivosti pomocou modelovania telies
Rok vytvorenia OPS/OSO:	2014 IX. kolo výzvy
Odborné stanovisko vypracoval:	PaedDr. Tatiana Sotáková

Za obsah a pôvodnosť rukopisu zodpovedá autor. Text neprešiel jazykovou úpravou.

Táto osvedčená pedagogická skúsenosť edukačnej praxe/osvedčená skúsenosť odbornej praxe bola vytvorená z prostriedkov národného projektu Profesijný a kariérový rast pedagogických zamestnancov.

Projekt je financovaný zo zdrojov Európskej únie.

Kľúčové slová

priestorová predstavivosť, vyučovanie stereometrie, modely telies, siete telies, stavebnice, kocka, štvorrozmerná kocka

Anotácia

Vo vyučovaní matematiky má dôležité miesto rozvoj priestorovej predstavivosti. V práci popisujeme odskúšané aktivity, zamerané na modelovanie telies, ktoré v geometrii predstavuje jednu z charakteristických metód poznávania. Zahŕňa rôzne činnosti, pri ktorých sú vytvárané alebo používané modely – papierové a plastové. Veľkú výchovnú hodnotu má použitie tých modelov, ktoré si žiaci sami zhotovujú. Uvádzame najmä menej známe aktivity, ktoré nie sú v učebniciach matematiky a ktoré by podľa nášho názoru mohli byť pre učiteľov inšpiratívne.

Akreditované programy kontinuálneho vzdelávania

Didaktická hra vo vyučovaní matematiky	176/2010-KV

OBSAH

ÚVOD

V štátnych vzdelávacích programoch je deklarované, že cieľom výchovy a vzdelávania je rozvoj kľúčových kompetencií, medzi nimi sa nachádza aj kompetencia uplatňovať matematické myslenie. V tematickom celku Geometria a meranie si vyučovanie matematiky dáva za cieľ rozvíjanie priestorovej predstavivosti žiakov, čo je aj námetom našej práce.

V teoretickej časti sa krátko venujeme pojmu priestorová predstavivosť a niektorým príčinám jej nízkej úrovne, problematike výučby stereometrie na našich školách a obsahu stereometrie v štátnom vzdelávacom programe.

V praktickej časti práce popisujeme aktivity odskúšané na hodinách matematiky na osemročnom i štvorročnom gymnáziu, zamerané na modelovanie telies s cieľom rozvíjať priestorovú predstavivosť žiakov. Modelovanie predstavuje jednu z charakteristických metód poznávania vo vyučovaní geometrie, ktorá je považovaná za najkonkrétnejšiu a s realitou najviac spätú časť matematiky. Metóda zahŕňa rôzne činnosti, pri ktorých sú vytvárané alebo používané modely. Veľkú výchovnú hodnotu má pritom použitie tých modelov, ktoré si žiaci sami zhotovujú. Pri výrobe takéhoto modelu žiak musí aktívne využívať poznatky a aplikovať ich pri riešení konkrétnej úlohy. Navyše takýto model nie je pre žiaka statický, pretože postupný vznik a manipulácia umožňujú jeho analyticko-syntetické chápanie.

Uvedené aktivity zahŕňajú výrobu a manipuláciu s papierovými a plastovými modelmi. Nekončia skonštruovaním telesa zo siete, ale nadväzujú na ne úlohy kombinatorického, logického, či geometrického charakteru, vyžadujúce aktívnu manipuláciu s vyrobenými telesami. Posledná aktivita sa zaoberá netradičným telesom – štvorrozmernou kockou. I keď reálny model takéhoto telesa pochopiteľne nemôžeme zostrojiť, vieme na základe analógie z jednorozmerného, dvojrozmerného a trojrozmerného priestoru toto teleso popísať. Ukáže sa pri tom krása vnútornej matematickej štruktúry, ukrytej v kockách.

Osvedčená pedagogická skúsenosť je určená učiteľom matematiky na základných školách, osemročných aj štvorročných gymnáziách. Z množstva aktivít si môžu vybrať tie, ktoré sú pre ich žiakov najvhodnejšie. Jednotlivé podkapitoly obsahujú:

- pomôcky potrebné na realizáciu danej aktivity,
- úvod, v ktorom obvykle vysvetľujeme, prečo sme sa rozhodli danú aktivitu so žiakmi vyskúšať,
- podrobný popis aktivity s obrázkami, úlohami a námetmi na ich riešenie, prípadne aj s pracovnými listami,
- skúsenosti s realizáciou, doplnené fotografiami a ďalšími námetmi.

Snažili sme sa vybrať najmä menej známe aktivity, ktoré nie sú v učebniciach matematiky a ktoré by podľa nášho názoru mohli byť pre učiteľov inšpiratívne. Realizovať ich môžu priamo na hodinách matematiky, na rozširujúcich či voliteľných predmetoch (napr. matematika hrou, cvičenia z matematiky) alebo v záujmovom krúžku. Niektoré témy umožňujú využiť aj medzipredmetové vzťahy. Keďže dnešná škola je už nemysliteľná bez modernej didaktickej techniky, na viacerých miestach sme zaradili ukážky využitia vhodných softvérov ako doplnku k našej téme.

Na záver je treba zdôrazniť, že modelovanie je pre vyučovanie geometrie najmä na základnej škole významné nielen z hľadiska poznávania, ale aj z hľadiska motivácie. Je to jedna z účinných metód, ako priblížiť žiakom svet geometrie. Ak je riešenie geometrickej úlohy založené na práci s priestorovými modelmi, pristupujú žiaci k tejto úlohe s podstatne väčším záujmom než napríklad k bežnému rysovaniu. Pokiaľ im navyše táto činnosť umožní využiť ich skúsenosti a dáva im dostatočný priestor pre ich tvorivosť, stáva sa pre nich príťažlivou a vyhľadávanou. A to môže byť potešiteľným prínosom pre každého učiteľa.

1 ROZVÍJANIE PRIESTOROVEJ PREDSTAVIVOSTI

1.1 Priestorová predstavivosť

Priestorová predstavivosť je súčasťou geometrickej predstavivosti a v užšom slova zmysle ňou rozumieme súhrn schopností, ktoré súvisia s predstavami jedinca o priestore, geometrických objektoch, ich vlastnostiach a vzájomných vzťahoch (Robová, 2009, s. 64). Mnoho odborníkov považuje za najdôležitejšie obdobie pre rozvoj priestorovej predstavivosti predškolský a mladší školský vek. Z pohľadu psychológov má rozvoj geometrickej predstavivosti nezastupiteľné obdobia, avšak aj neskoršie možno geometrické myslenie a priestorovú predstavivosť žiakov rozvíjať, i keď ide o pomalší a dlhodobejší proces, v ktorom sa využíva predovšetkým logické myslenie jedinca.

V posledných rokoch môžeme pozorovať postupné znižovanie úrovne vedomostí a zručností z geometrie u absolventov základných a stredných škôl. Viac než s riešením planimetrických úloh mávajú títo žiaci problémy s priestorovými úlohami. Všeobecne môžeme hovoriť o klesajúcej úrovni geometrického myslenia a priestorovej predstavivosti súčasných žiakov. Príčin tejto situácie je veľa, Molnár, Perný a Stopenová (2006, s. 9-10) uvádzajú najmä tieto:

- Celková doba, ktorú je možné vo vyučovaní venovať rozvíjaniu priestorovej predstavivosti, je nedostatočná, pretože:
    - pri súčasnom pojatí matematiky ako vyučovacieho predmetu nie je dostatok času k precvičovaniu učiva, je citeľný úbytok vyučovacích hodín geometrie, stereometrie a topografických prác v teréne, často chýbajú aplikačné stereometrické úlohy v iných tematických celkoch,
    - ubúda vyučovacích predmetov, v ktorých je rozvíjanie priestorovej predstavivosti najúčinnejšie (rysovanie, deskriptívna geometria, výtvarná výchova).
- K plneniu úloh pri rozvíjaní priestorovej predstavivosti nie sú dostatočne pripravení všetci učitelia matematiky, pretože:
    - na fakultách pripravujúcich učiteľov bola malá pozornosť venovaná syntetickej geometrii trojrozmerného priestoru, učitelia teda nemajú patričnú prípravu vo výučbe rysovania, vypestovaný správny vzťah k vyučovaniu stereometrie, mnohokrát sami dostatočne rozvinutú priestorovú predstavivosť,
    - prejavuje sa nedostatok kvalitnej metodickej literatúry k danej problematike.
- Prejavili sa i následky nedôsledného aplikovania metód rozvíjania priestorovej predstavivosti v matematike, napríklad žiaci nie sú vedení k zobrazovaniu telies a priestorových situácií (vo voľnom rovnobežnom premietaní) pri riešení úloh, nie je pestovaný grafický prejav žiakov, nedostatočne sa precvičujú konštrukčné úlohy.

- Významnejšiu rolu by mali zohrávať moderné metódy a technické prostriedky výchovy a vzdelávania, najmä multimediálne prezentačné programy, grafické programy a dynamická počítačová geometria.
- Medzi ďalšie príčiny nedostatočne rozvinutej priestorovej predstavivosti žiakov patrí:
  - podceňovanie významu rozvinutej priestorovej predstavivosti pre prax,
  - zaraďovanie výučby do menej intenzívnych častí školského roka,
  - vynechávanie stereometrického učiva niektorými učiteľmi,
  - vynechávanie stereometrických úloh pri maturitách, prijímacích a iných skúškach.

Ako zaujímavé a oprávnené sa preto javia odporúčania Plškovej (2010, s. 146) určené pre konkrétnu školskú prax:

- vytvoriť systém úloh k cieľavedomému sústavnému rozvíjaniu priestorovej predstavivosti a vhodne ho zakomponovať do učebníc matematiky,
- viac využívať možnosti interdisciplinarity, vyhľadávať a uplatňovať vhodné prvky k rozvoju priestorovej predstavivosti vo výtvarnej a technickej výchove, v telesnej výchove a ďalších vyučovacích predmetoch, vzájomne koordinovať formatívne pôsobenie na žiakov a ich vlastné aktivity,
- uplatňovať konštruktivistické prístupy k vyučovaniu geometrie na všetkých stupňoch a typoch škôl, akcentovať činnostný charakter a hľadať účinné prostriedky na rozvíjanie priestorovej predstavivosti ako všeobecne užitočnej schopnosti.

1.2 Vyučovanie stereometrie

Už v starovekom Grécku bolo vzdelanie v oblasti geometrie považované za prioritné. V našich krajinách bola koncom 18. a začiatkom 19. storočia intenzívne rozvíjaná deskriptívna geometria, čo ovplyvnilo aj postavenie geometrie na základných a stredných školách. V prvej polovici 20. storočia patrila geometria u nás medzi vážené disciplíny, pretože pestrosť a bohatosť geometrického sveta rozvíjala tvorivosť žiakov pri skúmaní daných situácií, schopnosť vynaliezavo hľadať riešiteľské stratégie, zovšeobecňovať javy a riešiť zložité úlohy z oblasti strojárenstva, stavebníctva, zememeračstva, astronómie a pod. V období modernizácie matematiky v druhej polovici 20. storočia však došlo k posunu koncepcie výučby geometrie na všetkých úrovniach vzdelávania od geometrie názoru a objavovania k axiomatickej výstavbe geometrie. Keďže v tejto koncepcii žiacke predstavy o pojmoch (bod, priamka, rovina, incidencia, rovnobežnosť...) nevychádzali z ich životných skúseností, často dochádzalo k deformovaniu predstáv o týchto pojmoch.

Vzhľadom na vyššie uvedené problémy je potešiteľné, že sa v súčasnosti začínajú objavovať prvky konštruktivizmu vo vyučovaní matematiky na základných a stredných školách aj v rámci prebiehajúcej školskej reformy na Slovensku z roku 2008. Zámerom autorov bolo priblížiť žiakom matematiku viac z praktického hľadiska, aby mali schopnosť a ochotu používať matematické modely myslenia (logické a priestorové myslenie) a prezentácie (vzorce, modely, diagramy, grafy, tabuľky).

V štátnom vzdelávacom programe je vzdelávací obsah učebného predmetu matematika v základných školách aj v gymnáziách rozdelený na päť tematických okruhov:

- Čísla, premenná a počtové výkony s číslami
- Vzťahy, funkcie, tabuľky, diagramy
- Geometria a meranie
- Kombinatorika, pravdepodobnosť, štatistika
- Logika, dôvodenie, dôkazy.

V tematickom okruhu Geometria a meranie sa žiaci zoznamujú so základnými geometrickými útvarmi, skúmajú a objavujú ich vlastnosti. Učia sa zisťovať odhadom, meraním a výpočtom veľkosť uhlov, dĺžok, povrchov a objemov. Riešia polohové a metrické úlohy z bežnej reality. Dôležité miesto má rozvoj priestorovej predstavivosti.

V odporúčaných výkonových štandardoch pre žiakov ZŠ sú v oblasti stereometrie uvedené nasledovné (rozdelenie do ročníkov je len orientačné, nakoľko podľa rámcových učebných plánov platných v súčasnosti je rozdelenie hodín a tým aj učiva do jednotlivých ročníkov v kompetencii školy):

5. ročník:
Vedieť postaviť jednoduchú stavbu z kociek podľa návodu (náčrtu, nákresu, kódovania a naopak).

7. ročník:
Vedieť načrtnúť a narysovať obraz kvádra a kocky vo voľnom rovnobežnom premietaní. Vyznačiť na náčrte kvádra a kocky ich viditeľné a neviditeľné hrany a ich základné prvky. Načrtnúť a narysovať sieť kvádra a kocky. Zostavovať a zhotoviť náčrt telies skladajúcich sa z kvádrov a kociek. Kresliť nárys, bokorys a pôdorys telies zostavených z kvádrov a kociek. Riešiť primerané slovné úlohy na výpočet povrchu a objemu kvádra a kocky s využitím premeny jednotiek obsahu a objemu.

8. ročník:
Načrtnúť kocku, kváder, hranol vo voľnom rovnobežnom premietaní. Poznať vlastnosti podstavy a plášťa hranola. Vedieť určiť počet hrán, stien a vrcholov hranola. Zostrojiť sieť kolmého hranola. Vypočítať objem a povrch kocky, hranola a kvádra (aj v slovných úlohách).

9. ročník:
Vedieť opísať valec, ihlan, kužeľ a pomenovať ich základné prvky. Vedieť určiť počet hrán, stien a vrcholov ihlana. Načrtnúť valec, ihlan, kužeľ vo voľnom rovnobežnom premietaní. Zostrojiť sieť valca, ihlana, kužeľa. Vedieť opísať guľu a pomenovať jej základné prvky. Riešiť primerané slovné úlohy na výpočet objemu a povrchu valca, ihlana, kužeľa a gule.

Pozitívnym prvkom vo vyučovaní geometrie je zaradenie učiva o stavbách z kociek, ktoré sa postupne graduje od 2. ročníka po 5. ročník ZŠ. Keďže stavanie stavieb z kociek podľa rôznej predlohy a ich následná interpretácia je založené na manipulačnej aktivite žiakov a následnej transformácii získaných priestorových skúseností do záznamu na papier v rovine, môžeme pokladať túto aktivitu za jednu z kľúčových aktivít podporujúcich rozvoj priestorovej predstavivosti žiakov v prirodzenej nadväznosti na ich predškolské skúsenosti.

Vhodné úlohy nájdeme aj v najnovších učebniciach matematiky autorskej dvojice Žabka, Černek (najmä Matematika pre 5. ročník ZŠ, 1. časť, pre 7. ročník ZŠ, 1. aj 2. časť a pre 8. ročník ZŠ, 1. časť).

V odporúčaných výkonových štandardoch pre žiakov gymnázia sú v oblasti stereometrie uvedené nasledovné:

- v rovnobežnom premietaní načrtnúť kváder alebo jednoduché teleso zložené z malého počtu kvádrov,
- nakresliť bokorys a pôdorys jednoduchých útvarov zložených z kvádrov,
- poznať príklady iných spôsobov znázorňovania priestoru (napr. vrstevnice alebo lineárna perspektíva),
- používať spôsoby dvojrozmernej reprezentácie priestoru pri riešení jednoduchých úloh,
- vypočítať povrch a objem telies pomocou daných vzorcov vrátane jednoduchých prípadov, keď je potrebné niektoré údaje dopočítať z ostatných údajov,
- v jednoduchých prípadoch zobraziť rez telesa rovinou,
- poznať súvislosti rezu guľou so súradnicovým systémom,
- riešiť jednoduché úlohy vyžadujúce priestorovú predstavivosť.

Stereometrické úlohy nájdeme v učebniciach matematiky pre 1. ročník gymnázií, 2. časť a pre 2. ročník gymnázií, 1. časť (autor Kubáček).

Novinkou, ktorú sme pred reformou na gymnáziách (takmer vôbec) neučili, je kreslenie bokorysov, pôdorysov a nárysov telies; či iné spôsoby znázorňovania priestoru do roviny (lineárna perspektíva, vrstevnice). Tieto novinky síce nie sú súčasťou cieľových požiadaviek na vedomosti a zručnosti maturantov z matematiky, no špeciálne zakresľovanie rôznych pohľadov na teleso do roviny má v sebe potenciál na rozvíjanie žiackej priestorovej predstavivosti, ktorá je neskôr dôležitá aj pri zobrazovaní rezu telesa rovinou.

2 MODELOVANIE TELIES NA VYUČOVACÍCH HODINÁCH

Pre rozvoj priestorovej predstavivosti je dôležitý vlastný zážitok a skúsenosť. Je preto nevyhnutné, aby žiak pracoval na hodinách geometrie s priestorovými objektmi a modeloval si priestorové situácie. V tejto časti práce popisujeme naše skúsenosti práve s takými aktivitami, ktoré sme opakovane odskúšali na hodinách matematiky na osemročnom i štvorročnom gymnáziu.

Prvé dve aktivity (Detská skladačka a Slnečné hodiny v tvare kocky) sú vhodné pre mladších žiakov (príma, sekunda). K aktivite Stavebnica Domy už žiaci potrebujú poznať hranoly a ihlany (tercia, kvarta). Z aktivít Stavebnica Polydron a Hlavolam s farebnými kockami je možné vybrať časti pre každú vekovú kategóriu, aj pre stredoškolákov. Uvedené aktivity zahŕňajú výrobu a manipuláciu s papierovými a plastovými modelmi. Nekončia skonštruovaním telesa zo siete, ale nadväzujú na ne úlohy kombinatorického, logického, či geometrického charakteru, vyžadujúce aktívnu manipuláciu s vyrobenými telesami. Posledná aktivita sa zaoberá netradičným telesom – štvorrozmernou kockou. I keď reálny model takéhoto telesa pochopiteľne nemôžeme zostrojiť, vieme na základe analógie z jednorozmerného, dvojrozmerného a trojrozmerného priestoru toto teleso popísať.

Snažili sme sa vybrať najmä menej známe aktivity, ktoré nie sú v učebniciach matematiky a ktoré by podľa nášho názoru mohli byť pre učiteľov inšpiratívne.

2.1 Detská skladačka

Pomôcky: rysovacie pomôcky, nožnice, lepidlo, farebné obrázky s rozmermi aspoň 6 x 9 cm, výkresy

Ciele:

- vytváranie siete telesa, konštrukcia telesa zo siete,
- rozvíjanie priestorovej predstavivosti pri oblepovaní stien telesa a odvaľovaní telesa podľa zadania,
- medzipredmetové vzťahy (výtvarná výchova), tímová spolupráca.

Úvod: Drevené kocky s nalepenými obrázkami sú vďačnou a obľúbenou hračkou pre malé deti.

Obrázok 1 Detské kocky

Prameň: http://www.peknehracky.sk

Pri správnom uložení kociek sa ukáže celý poskladaný obrázok, najčastejšie s motívom zvieratiek, rozprávky a pod. Pri otáčaní jednotlivých radov kociek sa ukážu aj ďalšie obrázky, celkovo ich je v každej skladačke šesť, keďže sú tvorené vždy inými stenami kociek. I keď hračkárstva ponúkajú pestrý výber, my sme sa rozhodli vyrobiť si vlastné kocky.

Popis: Po tom, čo žiaci objavili rôzne siete kocky (túto aktivitu popisujeme na inom mieste), sme do školy priniesli jednu detskú skladačku. Žiakov sme nechali, aby ju poskladali, pričom sa spontánne rozprúdili diskusie o kockách. Stačilo potom už len niekoľko vhodne zvolených viet, aby sme žiakov naviedli na to, že si takúto skladačku v triede vyrobíme. A keďže už nie sme malé deti, namiesto rozprávkových motívov to môžu byť obrázky filmových hrdinov, obľúbených spevákov, hokejových klubov, áut, budov atď. Každý si teda prinesie vlastný farebný obrázok s rozmermi 6 x 9 cm, vystrihnutý z časopisu. Samotná realizácia sa konala na dvojhodinovke výtvarnej výchovy. Žiaci sa rozdelili do skupín po 6 žiakov, jedna skupina bola menšia. Na výkresy narysovali siete kocky s hranou 3 cm, každý si mohol zvoliť typ siete. Skupina však dostala len dva výkresy, preto sa museli dohodnúť na umiestnení sietí tak, aby sa na jeden výkres zmestili tri siete. Učiteľ upozornil na to, že je potrebné nechať aj záložky na zlepenie kociek a v prípade potreby pomáhal s ich nakreslením. Nasledovalo vystrihovanie a lepenie kociek. V ďalšej fáze si každý žiak rozstrihal svoj donesený obrázok na šesť štvorcov so stranou 3 cm, ktoré si povymieňal so spolužiakmi a oblepil nimi svoju kocku. Na záver hodiny každá skupina predviedla svoju skladačku.

Obrázok 2 Výroba skladačky

Obrázok 3 Hotová skladačka

Prameň: vlastný návrh

Skúsenosti: Aktivita žiakov zaujala, dôverne známe prostredie kociek z ich raného detstva navodilo príjemnú atmosféru. Už pri vyrábaní kociek bolo možné dobre pozorovať, či členovia skupín medzi sebou komunikujú, alebo sa len hádajú a berú si výkresy z rúk. Pred nalepovaním obrázkov vyučujúca pripomenula, že výsledná skladačka má otáčaním radov kociek ukázať všetky obrázky správne zložené, teda nie je jedno, kam ktorý obrázok nalepíme. Zadanie bolo zámerne formulované tak, že si žiaci majú povymieňať obrázky a lepiť ich na svoje kocky. Tým boli nútení manipulovať s nimi, predstavovať si, ako sa otočia, zvažovať, ako nalepiť jednotlivé obrázky. Žiaci museli prísť na to, že si obrázky so spolužiakmi nemali povymieňať náhodne, pretože každá kocka v skladačke má svoje miesto. Zaujímavým momentom bol záver hodiny, keď každá skupina predviedla svoju skladačku pred celou triedou. Ukázalo sa, že dvom skupinám sa to nepodarilo úplne – niektoré obrázky boli nesprávne nalepené.

2.2 Slnečné hodiny v tvare kocky

Pomôcky: namnožené vystrihovačky, nožnice, lepidlo, orezávač alebo nôž, podložka na rezanie

Ciele:

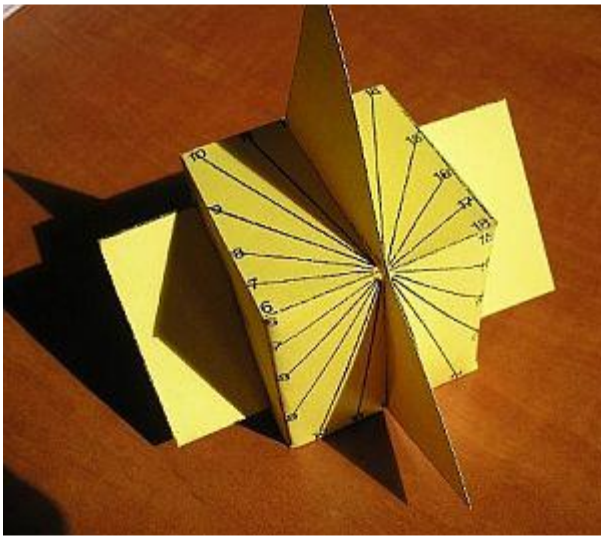
- rozvíjanie priestorovej predstavivosti - konštrukcia telesa zo siete,
- využitie medzipredmetových vzťahov – fyzika (meranie času), dejepis (meranie času v minulosti), geografia (časové pásma, stredoeurópsky a miestny čas), technika (vynálezy, výroba slnečných hodín, exkurzia), regionálna výchova.

Námet: Příhoda, 1983

Úvod: Nutnosť merania času viedla už od začiatku civilizácie k objavom najskôr jednoduchých, neskôr aj veľmi zložitých zariadení. Okrem sviečkových, presýpacích a vodných hodín, slúžiacich kedykoľvek, boli nimi aj slnečné hodiny, použiteľné len za slnečného jasu. Napriek tomuto obmedzeniu sa veľmi rozšírili, zrejme preto, že základom merania času je denný pohyb Slnka, ktorým sa riadi každodenná činnosť človeka. Výroba slnečných hodín vyžadovala nielen mechanickú zručnosť, ale aj poznatky z matematiky a astronómie. Slnečné hodiny využívajú fakt, že Zem v rámci Slnečnej sústavy vykonáva hneď niekoľko pohybov, z ktorých najdôležitejšie sú vo svojich dôsledkoch dva. Otáčanie okolo vlastnej osi a pohyb okolo Slnka. Rotácia okolo osi má za následok každodennú púť Slnka nad našimi hlavami od východu k západu, ročný obeh okolo materskej hviezdy zasa zmenu jej dennej dráhy po oblohe.

Popis: Na úvod aktivity rozprúdime medzi žiakmi diskusiu o potrebe merania času, o hodinách v minulosti a súčasnosti. Spýtame sa, či sa už stretli so slnečnými hodinami a rozhovor vedieme k slnečným hodinám v blízkom okolí. V Košiciach sa historické slnečné hodiny zachovali na južnej strane Dómu svätej Alžbety na Hlavnej ulici, zhotovili ich ešte v roku 1477. Aj keď dnes už slnečné hodiny možno nepotrebujeme, dômyselnosť našich predkov spojená s historickou a umeleckou hodnotou sú tým, prečo si zasluhujú našu pozornosť i ochranu. Z novších slnečných hodín môžeme spomenúť napríklad hodiny na dvore evanjelického kostola na Mlynskej ulici.

Pristúpime k výrobe vlastných slnečných hodín v tvare kocky. Vystrihneme všetky tri diely vystrihovačky (príloha č. 1). Potom orezávačom alebo nožom urobíme zárezy v štyroch stenách kocky a zlepíme ju. Napokon zasunieme do otvorov obdĺžnik a ukazovateľ. Aby sme mohli hodiny vyskúšať, musíme s nimi pochopiteľne vyjsť na slniečko a správne ich nasmerovať.



Obrázok 4 Slnečné hodiny

Obrázok 5 Odskúšanie slnečných hodín

Prameň: vlastný návrh

Skúsenosti: Samotná výroba hodín bola zaujímavá, žiaci sa tešili na výsledok. Potom však boli sklamaní nepresnosťou hodín. Preto je potrebné vysvetliť, že slnečné hodiny ukazujú pravý miestny slnečný čas, ktorý plynie nerovnomerne. Nie je teda totožný s rovnomerne plynúcim občianskym časom, ktorý ukazujú naše hodiny. Za nerovnomerné plynutie času môže sklon zemskej osi k ekliptike (23° 27´) a eliptický tvar dráhy Zeme okolo Slnka. Vzdialenosť Zeme od Slnka sa preto v priebehu roka mení. Ďalšie nepresnosti spôsobuje rozdiel medzi miestnym poludníkom a pásmovým časom (u nás je to stredoeurópsky čas definovaný na 15° východnej dĺžky). Samozrejme rozdiel spôsobuje aj zavedenie letného času. Viacero z týchto nepresností by sa dalo odstrániť výrobou hodín určených na meranie času v danom mieste v danom časovom období, to už však vyžaduje hlbšie vedomosti z gnómoniky (náuky o slnečných hodinách). Ak máme možnosť, môžeme si do plánu práce zaradiť exkurziu do Slovenského technického múzea, kde sa na expozícii historických hodín v kaštieli v Budimíre dozvieme isto veľa zaujímavostí. V prípade, že žiakov téma slnečných hodín zaujala, môžeme im ukázať aj zaujímavú stránku http://sundial.damia.net. Na tejto stránke si môžu vytvoriť vystrihovačku vlastných slnečných hodín prispôsobených orientácii a polohe steny svojho domu alebo okna svojej izby, kam hodiny napokon umiestnia.

2.3 Hlavolam s farebnými kockami

Pomôcky: rysovacie potreby, nožnice, lepidlo, výkres, farebné ceruzky alebo vodové farby

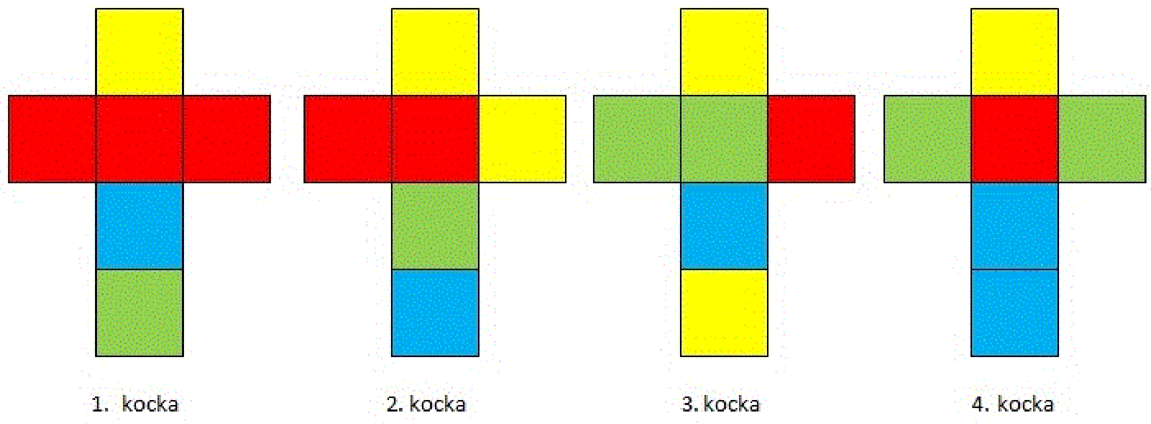
Ciele:

- konštrukcia telesa zo siete, vyfarbovanie stien telesa,
- rozvoj priestorovej predstavivosti manipuláciou s kockami,
- rozvoj kombinatorického a logického myslenia,
- tímová spolupráca.

Námet: Zelinka, 1979, s. 123-127

Úvod: Možno sa vám už niekedy dostal do rúk tento logický hlavolam, pozostávajúci zo štyroch kociek s rôzne zafarbenými stenami. Kocky sú štyri a na ich stenách sa vyskytujú farby: červená, zelená, modrá a žltá, pričom každá kocka je iná. Úlohou je zostaviť z týchto kociek kváder, ktorý bude spĺňať určité požiadavky na farebnosť svojich stien. Aj keď je možné tento hlavolam kúpiť (najčastejšie drevený), my sme si so žiakmi vyrobili vlastný, papierový.

Popis: Je vhodné, ak žiakov vieme rozdeliť do štvoríc, v ktorých spoločnými silami vyrobia jednu sadu hlavolamu. Najprv žiakov vyzveme, aby každý narysoval a vystrihol sieť jednej kocky s daným rozmerom (vhodná je dĺžka hrany 2 alebo 3 cm). Potom žiaci vyfarbia steny svojich kociek podľa obrázka a zlepia.



Obrázok 6 Siete kociek tvoriacich hlavolam

Prameň: vlastný návrh

Tým je skončená prvá časť hodiny, ktorú môžeme urýchliť tým, že žiaci kocky vyrobia doma a v škole ich už len vyfarbia, prípadne tým, že farebnými samolepkami oblepíme plastové kocky alebo donesieme stavebnicu Polydron. V druhej časti sa môžeme pustiť do riešenia hlavolamu.

Úlohy:

1. Zostavte z kociek kváder 4x1x1 tak, aby jedna jeho obdĺžniková stena bola jednofarebná a ostatné tri steny 4x1 boli štvorfarebné.

2. Zostavte z kociek kváder 4x1x1 tak, aby každá jeho obdĺžniková stena bola štvorfarebná.

3. Z dvoch súprav zostavte kocku, ktorej všetky steny budú jednofarebné.

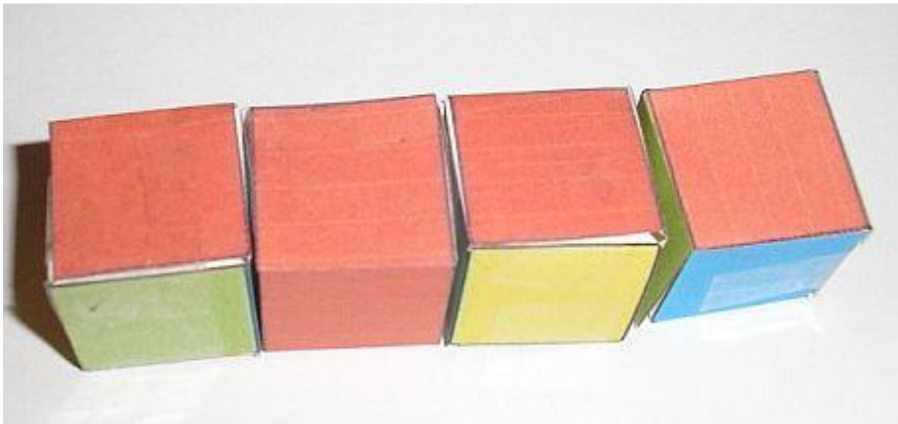
Skúsenosti: Riešenie hlavolamu zaujme mladších aj starších žiakov. Spočiatku kocky ukladajú náhodne, neskôr si uvedomujú, že si musia všímať farby na protiľahlých stenách. Počas riešenia sústavne s kockami manipulujú, otáčajú ich, preklápajú, čím rozvíjajú svoju priestorovú predstavivosť. Postupne sa viacerí začnú vzďaľovať od predmetnej skutočnosti – už nemusia každú kocku priložiť k predchádzajúcim, stačí, že si ju pootáčajú v ruke a vedia rozhodnúť, či sa bude dať priložiť alebo nie. Oceníme každého žiaka, ktorému sa podarí poskladať kváder podľa zadania. Žiakom, ktorým sa nedarí, pomôžeme návodmi. Ako prémiovú alebo domácu úlohu môžeme vyzvať žiakov, aby vytvorili iný farebne zaujímavý kváder a zaznačili si riešenie. Tieto nové úlohy si môžu žiaci zadávať navzájom na ďalšej hodine. V prípade, že máme šikovných žiakov s dostatočne vyzretou abstrakčnou úrovňou myslenia, môžeme ich oboznámiť aj s riešením 2. úlohy pomocou teórie grafov.

Návody:

1. Najprv rozhodnite o farbe jednofarebnej steny kvádra.
2. Všimnite si najprv dvojice protiľahlých stien a možnosti pre dve protiľahlé štvorfarebné steny 4x1 na hľadanom kvádri.
3. Zostavte kváder 2x2x1, ktorý má okrem jednej steny 2x2 všetky steny jednofarebné a má dvojice protiľahlých stien 2x1 rovnakej farby.

Riešenia:

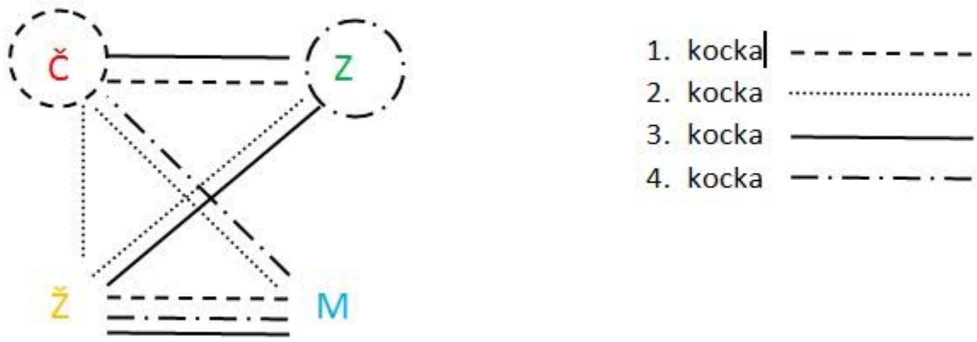
1. Jednofarebná stena môže byť len červená, lebo z inej farby nie je sedem stien. Pretože na štvrtej kocke je oproti červenej stene modrá, druhá kocka bude prispievať do červenej steny kvádra tou svojou červenou stenou, oproti ktorej má žltú stenu. Vzájomná poloha druhej a prvej kocky je jednoznačná, vynútené je aj priloženie tretej a štvrtej kocky. Až na premiestnenie kociek v smere najdlhšej osi súmernosti má teda úloha jediné riešenie.



Obrázok 7 Riešenie prvej úlohy

Prameň: vlastný návrh

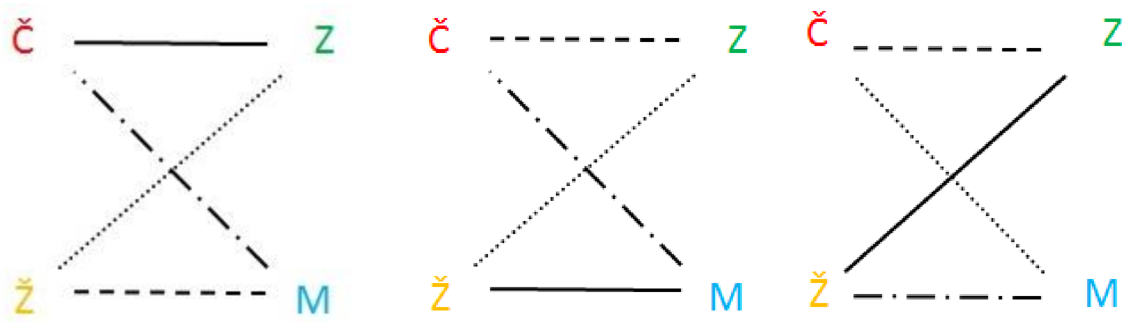
2. Zostrojíme graf, ktorého vrcholy označíme Č, M, Z, Ž a budú odpovedať farbám s príslušnými začiatočnými písmenami. Hrany grafu budú znázorňovať dvojice protiľahlých stien jednotlivých kociek. Hrany odpovedajúce jednej kocke odlíšime v grafe od hrán odpovedajúcich ostatným kockám druhom použitej čiary - čiarkovaná, bodkovaná, plná a bodkočiarkovaná. Pomerne ľahko vylúčime prípad, v ktorom by prvá kocka prispievala k dvojici protiľahlých štvorfarebných stien červenými stenami, teda hranou Č-Č. Vtedy by totiž druhá kocka musela prispieť dvojicou Ž-Z a tretia kocka dvojicou M-Ž. Potom by štvrtá kocka mala prispieť dvojicou Z-M, ale takú nemá. Ak predchádzajúcu úvahu sledujeme na grafe, vidíme, že vlastne potrebujeme 4 hrany rôznych druhov (každú z inej kocky), ktoré tvoria pravidelný graf 2. stupňa (každá farba je potrebná dvakrát – na dvoch stenách 4x1).



Obrázok 8 Graf k riešeniu druhej úlohy

Prameň: vlastný návrh

Vylučovacou metódou dostaneme prípady na nasledujúcom obrázku:

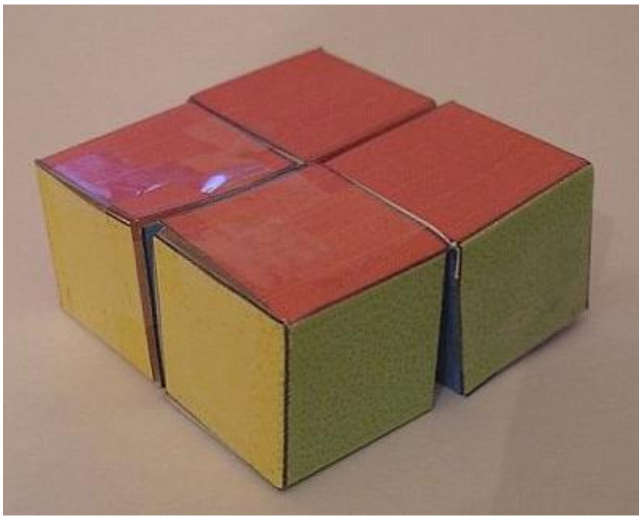


Obrázok 9 Zúženie možností

Prameň: vlastný návrh

Pretože potrebujeme dve dvojice štvorfarebných protiľahlých stien, na jednu (predozadnú) musíme použiť polohu kociek znázornenú jedným grafom a na druhú (hornodolnú) druhým z nájdených grafov na obrázku. Avšak žiadna dvojica protiľahlých stien nemôže byť súčasne predozadná i hornodolná, preto kocky musíme uložiť podľa prvého a tretieho grafu. Vidíme, že úloha má jediné riešenie, ak zanedbáme presúvanie kociek pozdĺž najdlhšej osi súmernosti kvádra. Riešením je teda kváder, na ktorého hornej stene sú farby v poradí červená, modrá, zelená, žltá, na dolnej stene zelená, červená, žltá, modrá. Na prednej stene sú modrá, žltá, zelená, červená a na zadnej stene žltá, zelená, červená, modrá.

3. Zložíme tretiu a štvrtú kocku tak, aby obe mali hornú stenu červenú, prednú stenu zelenú a protiľahlé bočné steny žlté. Za ne priložíme druhú a prvú kocku tak, aby mali horné aj zadné steny červené a protiľahlé bočné steny žlté. Spojíme s rovnako zloženou druhou súpravou kociek.



Obrázok 10 Riešenie tretej úlohy

Prameň: vlastný návrh

Ukážky žiackych riešení:

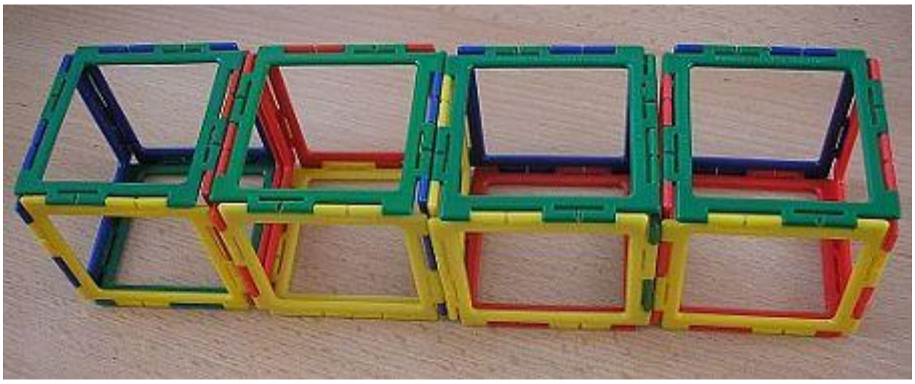
1. Najprv sme skúsili dať na hornú stenu všade zelenú. Ale to sa nedá, lebo na 2. kocke je iba jedna zelená, preto sme limitovaní tým, že na opačnej stene bude žltá. Na 1. kocke bude oproti zelenej červená, na 4. kocke zelená. Na 3. kocke bude oproti zelenej buď žltá alebo červená a to sa už opakuje. Takže zelená nie. S modrou sa to tiež nedá, lebo nemáme oproti modrej zelenú. Skúsime žltú. Na 1. kocke je oproti žltej modrá, na 2. kocke červená, na 3. kocke je oproti žltej zelená aj modrá, na 4. kocke len modrá. Takže sa to nedá, lebo na dvoch kockách je oproti žltej modrá. Zostala nám len červená a to už sa dá poskladať.

2. Spočítali sme si všetky steny – žltých je 6, modrých 5, červených 7 a zelených 6. Keďže všetky steny kvádra majú byť štvorfarebné, tak dokopy máme mať štyri steny z každej farby. Takže vieme, koľko z ktorej farby máme zakryť spojením k sebe. Na prvej kocke máme tri červené, tak sa musíme zbaviť dvoch z nich, lebo na každej kocke môže byť z každej farby len jedna. Na štvrtej kocke nás to donútilo skryť obe zelené kvôli tomu, že sú oproti sebe a nesedelo to s prvou kockou – buď sa opakovala červená alebo zelená. Ostatné dve kocky sme už len skúšali správne otočiť.

Ukážky úloh vytvorených žiakmi: Uvádzame štyri úlohy vytvorené žiakmi prvého ročníka štvorročného štúdia. Na zostavenie hlavolamu sme použili stavebnicu Polydron, ktorá veľmi urýchli proces tvorby hlavolamu. Zároveň však aj zjednodušuje riešenie úloh, nakoľko žiaci vidia všetky steny kociek naraz a nemusia ich ručne otáčať alebo preklápať.

1. Zistili sme, že sa nedá zostrojiť hranol, ktorý by mal každú stenu jednofarebnú. Dokážeme to so štvrtou kockou, ktorá má dve zelené oproti sebe. Tie ale nemôžeme použiť, lebo potom by dve celé steny hranola museli byť zelené a na to nemáme dosť zelených, nie je ich osem. Takže musíme tie dve zelené skryť, otočiť dovnútra. Ale potom by museli byť dve steny modré a to sa nedá, lebo modrých je ešte menej ako zelených.

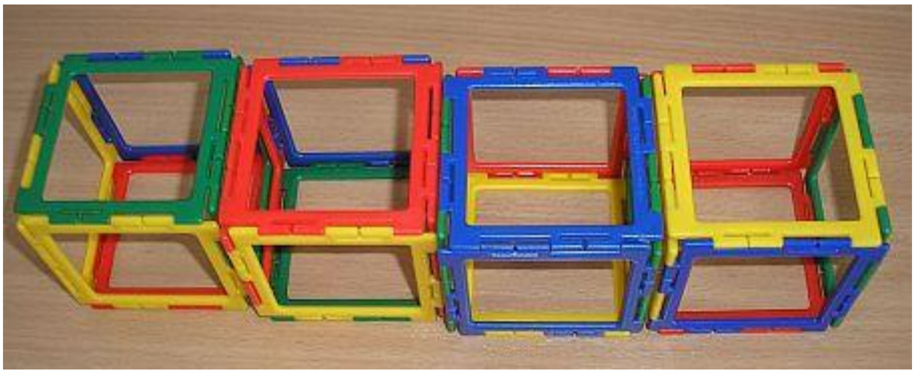
2. Poskladajte kocky tak, aby jedna stena hranola bola jednej farby aj druhá stena bola jednej farby.



Obrázok 11 Riešenie druhej žiackej úlohy

Prameň: vlastný návrh

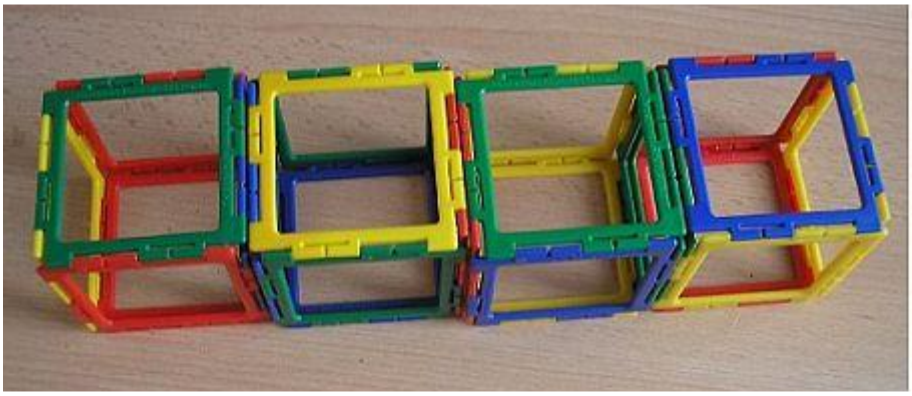
3. Zložte kváder 4x1x1 tak, aby dve steny boli dvojfarebné, jedna stena bola trojfarebná a jedna štvorfarebná.



Obrázok 12 Riešenie tretej žiackej úlohy

Prameň: vlastný návrh

4. Poskladajte kocky tak, aby na stenách, kde sa stretnú, bola rovnaká farba, aj na krajoch, teda aj keď zameníme ich poradie.



Obrázok 13 Riešenie štvrtej žiackej úlohy

Prameň: vlastný návrh

2.4 Stavebnica Domy

Pomôcky: dve stavebnice, papiere so štvorcovou sieťou alebo pracovné listy, pravítka

Ciele:

- zostavovanie modelov domov daných parametrov,
- triedenie a pomenovanie základných hranatých telies,
- zobrazovanie telies vo voľnom rovnobežnom premietaní,
- kreslenie nárysov, pôdorysov a bokorysov,
- výpočet povrchov telies,
- propedeutika súmerností v priestore,
- zostrojovanie siete zložitého telesa.

Námet: s touto stavebnicou sme sa oboznámili v roku 2003 v Litomyšli na konferencii Jak učit matematice žáky ve věku 10 – 16 let, kde ju prezentoval jej autor Filip Roubíček

Úvod: Činnosti, akými sú napríklad zobrazovanie a vytváranie modelov trojrozmerných objektov, vedú žiakov prirodzeným spôsobom k objavovaniu súvislostí medzi stereometrickými a planimetrickými poznatkami. Modelovanie stereometrickej situácie iba pomocou vizuálnych modelov (napríklad obrázkov) býva pre porozumenie niekedy nedostatočné, pretože niektorí žiaci nie sú schopní pomocou nich modelovaný objekt náležite uchopiť. Títo žiaci potrebujú vidieť 3D objekt alebo model v jeho reálnej podobe a mať možnosť s ním manipulovať. Na druhej strane je nutné zdôrazniť, že použitie taktilných modelov (t.j. modelov, ktoré možno vnímať zrakom aj hmatom) má svoje obmedzenia a že je preto nutné, aby žiaci boli schopní vidieť 3D objekt v 2D obraze. Schopnosť prevádzať transformácie medzi rýdzo vizuálnymi a taktilnými modelmi je nevyhnutným predpokladom pre výučbu stereometrie. Nasledujúce aktivity umožňujú túto schopnosť rozvíjať.

Popis: Stavebnica sa skladá z 20 papierových modelov rôznych geometrických telies – kocky a kvádre sú z bieleho papiera, trojboké hranoly (aj zrezané a kosé) a štvorboké ihlany sú z červeného papiera. Na obrázku sú uvedené ukážky modelov domov, ktoré z nich možno zostaviť.

Obrázok 14 Ukážky modelov domov

Prameň: vlastný návrh

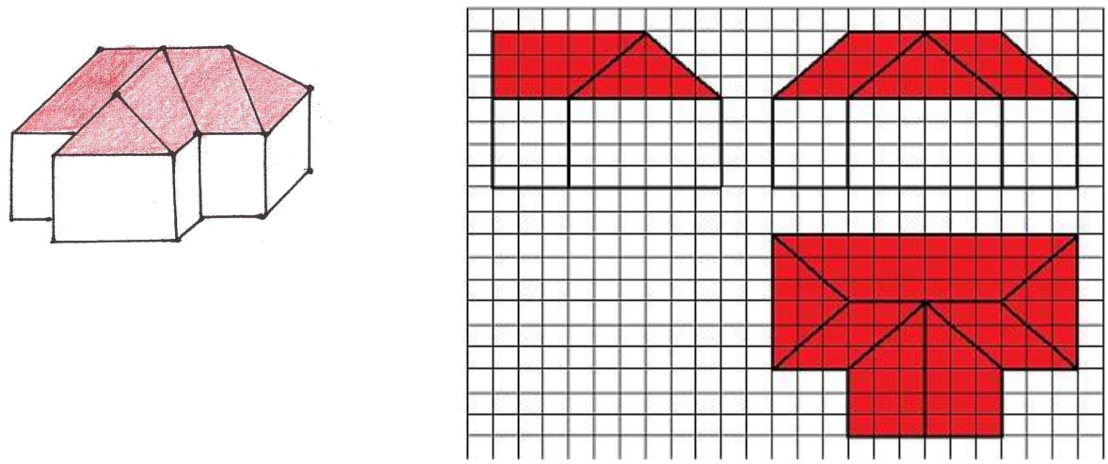
Rozmery a tvary telies sú navrhnuté tak, aby bolo možné diely ľahko kombinovať a vytvárať z nich rozmanité stavby a aby sa pravouhlé priemety telies dali ľahko zobraziť v štvorcovej sieti. Stavebnicové diely sú zhotovené v dvoch základných rozmeroch 6 cm a 3 cm a ich steny sú prevažne pravouholníky a pravouhlé trojuholníky.

Popis odporúčaných aktivít (žiakov rozdelíme na menšie skupiny, diely stavebníc rovnomerne rozdelíme do skupín):

1. **staviame dom** – každá skupina žiakov postaví model domu podľa vlastného návrhu. Nasleduje zobrazenie modelu, pričom učiteľ môže vybrať spôsob podľa toho, ktoré stereometrické zručnosti chce so žiakmi rozvíjať:

   – zobrazovanie vo voľnom rovnobežnom premietaní – dbáme na dodržiavanie základných pravidiel zobrazovania,

   – zobrazovanie pravouhlých priemetov (nárys, pôdorys a bokorys) modelu domu na papier so štvorcovou sieťou. Na obrázku vidíme jeden model domu vo voľnom rovnobežnom aj v pravouhlom premietaní.



Obrázok 15 Zobrazenie domu

Prameň: vlastný návrh

   – slovný popis – vyzveme žiakov, aby svoju stavbu slovne popísali. Potrebujú k tomu matematicky správne pomenovať telesá, z ktorých ju postavili, odmerať ich rozmery, popísať tvar strechy. Rozvíjame tak schopnosť používať matematickú terminológiu, správne a presne sa vyjadrovať.

2. **architekti a stavbári** - jedna skupina žiakov (architekti) postaví svoj model domu a zobrazí ho alebo popíše niektorým z vyššie uvedených spôsobov. Druhá skupina (stavbári) sa potom snaží podľa dodaného zobrazenia alebo popisu postaviť pôvodnú stavbu a následne zavolá architektov na kontrolu.

3. **natierame strechu** – necháme žiakov vypočítať, koľko plechoviek farby potrebujú na natretie šikmých plôch strechy svojho domu. K tomu potrebujú odmerať rozmery strechy (dohodneme, že 1 cm modelu odpovedá 1 m v skutočnosti) a vypočítať obsahy jednotlivých plôch**.** Napokon vypočítajú spotrebu farby. Ak učiteľ vie priniesť do triedy plechovku od farby a nechať

žiakov, aby sami zistili údaje o výdatnosti farby, prípadne aj cenu, tak vyučovanie získa na názornosti a reálnosti.

4. **pracovný list** – v prílohe č. 2 je uvedený pracovný list na prácu so stavebnicou, ktorý je komplexnejšieho charakteru.

5. **propedeutika súmerností v priestore** – v učive geometrie základnej aj strednej školy sú zahrnuté len súmernosti v rovine. My však žijeme v trojrozmernom priestore a tak má význam zaoberať sa stredovou, osovou a rovinovou súmernosťou priestorových útvarov. Opýtame sa, či model domu, ktorý žiaci postavili je osovo alebo rovinovo súmerný. Vyzveme ich, aby postavili dva modely tak, aby boli navzájom rovinovo, osovo (prípadne aj stredovo) súmerné.

6. **sieť modelu domu** – ako dobrovoľnú prémiovú domácu úlohu môžeme žiakov postaviť pred výzvu vyrobiť papierový model svojho domu, ktorý bude zložený iba z jedného kusu. V diskusii si vyjasníme, že je potrebné zostrojiť sieť celého telesa a následne ju zložiť a zlepiť.

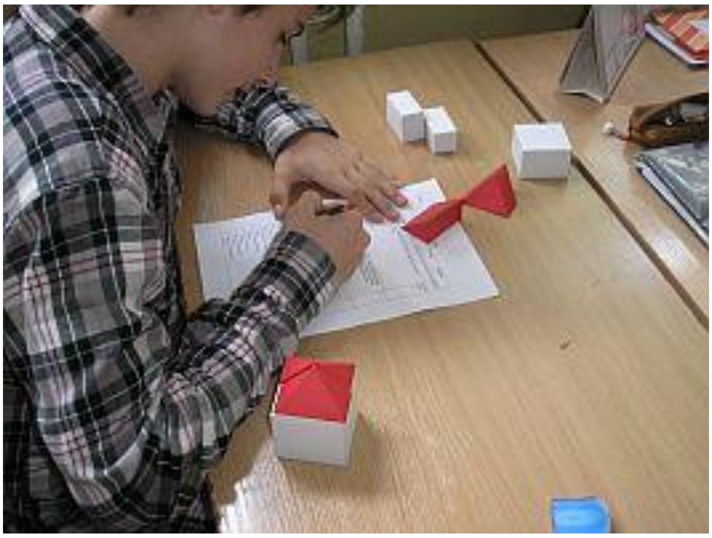
Skúsenosti: Vzhľadom k tomu, že z tejto stavebnice možno zostavovať modely reálnych stavieb, je práca s ňou pre žiakov pozitívne motivujúca. Tešia sa možnosti postaviť si vlastný model, vždy vyskúšajú viacero, než sa rozhodnú pre konečný tvar. V prípade potreby môže učiteľ obmedziť počet dielov, z ktorých sa dom skladá, aby nevznikali priveľmi jednoduché alebo naopak priveľmi zložité stavby.

1. **staviame dom** - stavebnice sme do triedy priniesli viackrát, zakaždým sme na časti vyučovacej hodiny zrealizovali niektorú čiastkovú úlohu. Je potrebné, aby žiaci už mali skúsenosti so zobrazovaním základných telies vo voľnom rovnobežnom premietaní, nakoľko modely domov sú predsa len zložitejšie telesá. Rovnako je potrebné, aby mali skúsenosti so zobrazovaním v pravouhlom premietaní. V súčasných učebniciach matematiky pre ZŠ sú úlohy na zostrojovanie nárysov, pôdorysov a bokorysov kockových telies, vďaka ktorým sa žiaci vopred s týmito pojmami oboznámia. Naše modely domov sú však predsa len bližšie realite. Precvičovať kreslenie rôznych pohľadov na teleso môžeme aj vďaka sérii voľne dostupných appletov na webovej stránke http://www.fi.uu.nl/wisweb/applets/mainframe_en.html.

2. **architekti a stavbári** – výborná aktivita, ktorá žiakom dáva spätnú väzbu o správnosti ich riešenia. Učiteľ musí byť pripravený riešiť prípadné rozpory – niekedy je možné dom postaviť viacerými spôsobmi, niekedy sa pomýlia architekti, inokedy stavbári. Pri starších žiakoch sa môžeme dohodnúť aj na takom zobrazovaní domu, pri ktorom dve steny ležiace v jednej rovine budeme znázorňovať ako jeden mnohouholník, napr. na obrázku 15 by čelná stena domu vo voľnom rovnobežnom premietaní a v náryse nebola zobrazená ako biely obdĺžnik a červený trojuholník, ale ako biely päťuholník.

3. **natierame strechu** – pozitívnym prínosom takto formulovanej úlohy je skutočnosť, že žiaci určite nenatrú podstavu hranola alebo ihlana, tvoriaceho strechu, čo sa pri bežne formulovaných úlohách z učebnice stáva.

4. **pracovný list** – používame ho na záver tematického celku, v ktorom sme pracovali so stavebnicou. Na jeho vyplnenie stačí 25 až 30 minút, umožňuje hodnotiť prácu žiackych skupín.



Obrázok 16 VypÍňanie pracovného listu

Prameň: vlastný návrh

5. **propedeutika súmerností v priestore** – zaujímavou úlohou je postaviť k danému domu s ním stredovo súmerný dom, pretože to vyžaduje otočiť dom hore nohami. Prísť na túto skutočnosť je pre deti úplným objavom.

6. **sieť modelu domu** - prinesené hotové modely porovnáme s pôvodnými stavbami, žiakov za ich prácu oceníme a modely zaradíme do našej zbierky netradičných telies.

2.5 Stavebnica Polydron

Pomôcky: dve stavebnice, pracovné listy

Ciele:

- konštrukcia telesa zo siete, vytváranie siete telesa, manipulácia so sieťou telesa,
- objavenie Eulerovej vety,
- telesá a ich vlastnosti (kocka, hranol, štvorsten, ihlan, antihranol),
- Platónske a Archimedovské telesá, nepravidelné mnohosteny,
- výpočet povrchov telies.

Úvod:

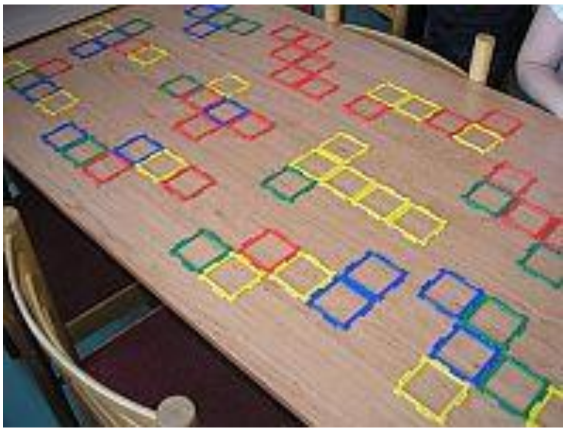
Stavebnica Polydron je systém pevných farebných modelov nasledovných útvarov: rovnostranný trojuholník (v dvoch veľkostiach), rovnoramenný trojuholník, pravouhlý rovnoramenný trojuholník, štvorec, obdĺžnik, pravidelný päťuholník a pravidelný šesťuholník. Základná vlastnosť modelov uvedených n-uholníkov spočíva v možnosti jednoduchého spájania pomocou jedinečnej závesnej svorky. Táto vlastnosť umožňuje využitie týchto modelov pri zhotovovaní rôznych konvexných i nekonvexných telies.

Svoje korene vzniku má viac ako 30 ročné. V roku 1970 pracoval strojárenský konštruktér Edward Harvey na jednom projekte riešenia ohybného pántu a výsledok tohto patentu bol základom pre veľmi úspešný a medzinárodne uznávaný systém. Prehľad o súčasne vyrábaných produktoch je možné získať na internetovej stránke www.polydron.com.

Popis:
V našom kabinete matematiky máme dve stavebnice Polydron – jedna má 460 dielov, druhá 268. Jednotlivé diely sú vyrobené z plastu v štyroch farbách – žltá, červená, modrá a zelená. Pri preberaní učiva o telesách ich s obľubou nosíme do všetkých tried – k mladším aj starším žiakom. Na nasledujúcich stranách popisujeme niektoré osvedčené aktivity.

1. Siete kocky
Úloha nájsť všetky siete kocky nie je triviálna, pri jej riešení oceníme všetky výhody, ktoré ponúka stavebnica Polydron. Žiaci majú možnosť svoje návrhy sietí odskúšať, majú teda okamžitú spätnú väzbu. Najprv ich necháme pracovať samostatne, neskôr ich vyzveme, aby prišli svoje návrhy nakresliť na tabuľu. Tieto návrhy žiaci sami postupne dopĺňajú, korigujú, až máme na tabuli všetkých 11 sietí.

Obrázok 17 Hľadanie sietí



Obrázok 18 Všetky siete kocky

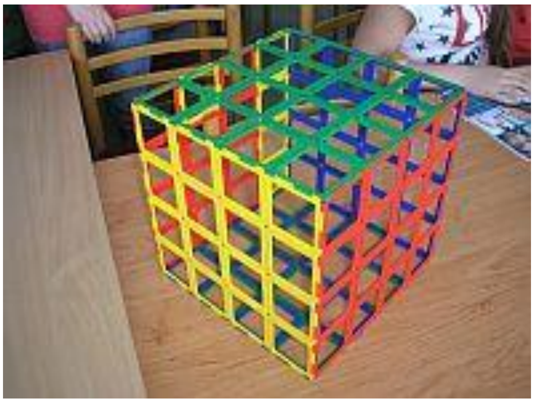
Prameň: vlastný návrh

Skúsenosti: Výborná aktivita, je zaujímavé pri tom pozorovať žiakov, ako postupujú – niektorí berú hneď do rúk stavebnicu, iní najprv nakreslia spamäti niekoľko sietí a až potom siahnu po stavebnici. Niektorí najprv nakreslia svoj návrh siete a potom ho vyskúšajú, iní rozoberajú kocku a zisťujú, či im nevyšla sieť, ktorú ešte nemajú. Stáva sa, že žiaci objavia viac ako 11 sietí, pretože niektoré nakreslia dvakrát, v otočenej alebo preklopenej podobe. Tu opäť výborne pomôže stavebnica, nakoľko ľahko názorne ukážeme, že ide o tú istú sieť. V závere hodiny môžeme urobiť aj zhrnutie, prečo nemôže byť viac sietí kocky – najprv v diskusii vylúčime siete dĺžky 6 a 5 dielikov. Následne systematicky preberáme všetky možnosti zostavenie siete dĺžky 4, 3 alebo 2 dieliky.

2. Maxi kocka
V jednom školskom roku žiaci pri práci so stavebnicou spontánne prišli na nápad poskladať čo najväčšiu kocku. Odvtedy to s obľubou zadávame žiakom ako problémovú úlohu. Najprv ich vyzveme, aby v skupinách navrhli, aká najväčšia kocka sa dá zložiť

z našich dvoch stavebníc. K tomu potrebujú zistiť počet štvorcov, ktoré majú k dispozícii (112). Tento počet vydelia šiestimi, keďže kocka má 6 stien. Výsledok (18) niektorí prehlásia za rozmer kocky. Iní si uvedomia, že taká stena kocky nemôže byť a za výsledok prehlásia číslo 16. To hovorí o uvedomení si, že stena kocky musí byť štvorec, ale zároveň to hovorí o zámene obsahu štvorca so stranou štvorca. Napokon sa nájdu aj žiaci, ktorí navrhnú správny výsledok – kocka bude mať hranu dĺžky 4. Necháme žiakov diskutovať o jednotlivých návrhoch a až potom pristúpime k stavbe maxi kocky. Každá skupina žiakov zloží jednu stenu a potom sa s nadšením pustia do skladania celej kocky.

Obrázok 19 Stavba maxi kocky



Obrázok 20 Hotová maxi kocka

Prameň: vlastný návrh

Skúsenosti: Táto aktivita núti žiakov predstavovať si, ako bude maxi kocka vyzerať, uvedomiť si rozdiel medzi hranou a stenou. Zo známeho povrchu kocky potrebujú zistiť dĺžku jej hrany. Napriek tomu, že v tom čase ešte nepoznajú odmocniny, vďaka názornej predstave spájania štvorcov úlohu spoločnými silami zvládnu. Silným momentom je aj samotné skladanie maxi kocky – žiaci majú možnosť okamžite overiť správnosť svojho úsudku. Z kocky majú radosť, chcú sa s ňou hrať a je im ľúto, že ju na konci hodiny musia rozobrať.

3. Eulerova veta

Žiakov necháme, aby si postavili ľubovoľné konvexné teleso a spočítali jeho hrany, vrcholy a steny. Potom ich vyzveme, aby do tabuľky na tabuli zapisovali tieto počty. Smerujeme ich k tomu, aby sami objavili Eulerovu vetu, ktorá vyjadruje vzťah medzi počtom vrcholov, hrán a stien konvexného mnohostena nasledovne:

$$v + s = h + 2$$

Skúsenosti: K objaveniu vzťahu môžeme žiakov vyprovokovať tým, že sa zahráme na jasnovidcov. Vyzveme ich, aby na tabuľu zapísali iba počet vrcholov a stien a my potom bez toho, aby sme sa na teleso čo i len pozreli, dopíšeme na tabuľu počet hrán. Žiaci v snahe zistiť, ako to dokážeme, sami objavia uvedený vzťah. Napokon môžeme zložiť aj nejaké nekonvexné telesá a overovať, či pre ne Eulerova veta bude tiež platiť.

4. Platónske a Archimedovské telesá

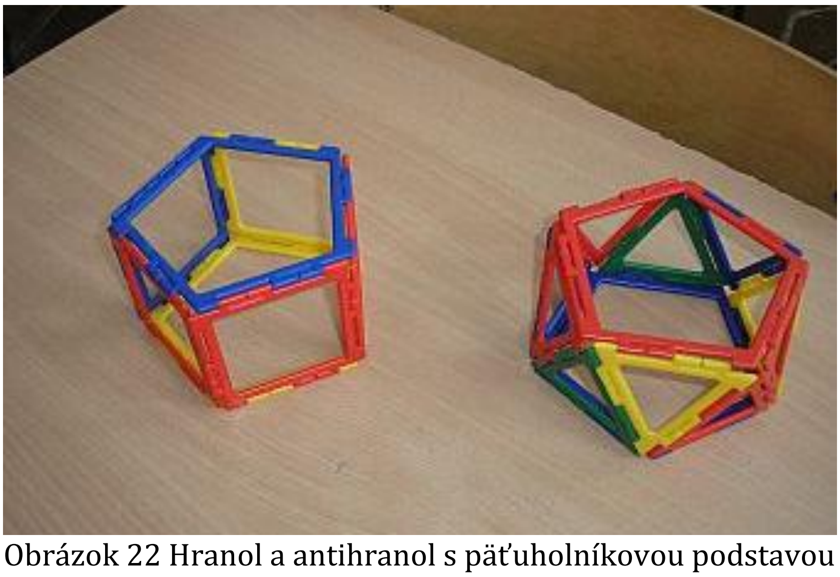
Stavebnica výborne poslúži aj pri zostavovaní modelov pravidelných a polopravidelných mnohostenov. Žiakov postavíme pred úlohu – aké telesá dokážete postaviť iba z jedného druhu mnohouholníkov? Kocku, štvorsten a osemsten nájdu ľahko, stavba dvanásťstena a dvadsaťstena sú už náročnejšie. Viac o týchto telesách, nazývaných

Platónske, ako aj zdôvodnenie, prečo ich nemôže byť viac nájdeme v literatúre (napr. Vallo a kol., 2012, s. 26-28). Za archimedovské zase považujeme také konvexné mnohosteny, ktorých steny sú pravidelné mnohouholníky rôznych typov a ich hrany majú rovnakú dĺžku. Ich popis a siete nájdeme v spomínanej literatúre (s. 72-89).

Obrázok 21 Pravidelné mnohosteny

Prameň: http://www.stiefel-eurocart.sk

Osobitnou skupinou polopravidelných mnohostenov sú antihranoly. Zhotovenie modelov niektorých z nich (vrátane ich sietí) je pomocou stavebnice veľmi jednoduché, zatiaľ čo geometrické znázornenie už celkom jednoduché nie je. Pravdepodobne je to aj príčina, prečo sa tieto telesá takmer vôbec v školskej matematike nevyskytujú. Stavebnica umožňuje zhotoviť modely antihranolov s trojuholníkovou, štvorcovou, päťuholníkovou a šesťuholníkovou podstavou.



Obrázok 22 Hranol a antihranol s päťuholníkovou podstavou

Prameň: vlastný návrh

Skúsenosti: Opäť vďačná téma, pri ktorej oceníme prednosti stavebnice. Pomocou veľkostí vnútorných uhlov mnohouholníka a názorného skladania odvodíme, prečo je len 5 pravidelných mnohostenov. Pri polopravidelených mnohostenoch si pripravíme vytlačené siete telies. Vhodným pomocníkom k tejto téme je softvér POLY dostupný na adrese www.peda.com.

5. Pracovné listy
V prílohe č. 3 je uvedená ukážka pracovného listu, ktorý sme pre žiakov vytvorili. Pre každú skupinu žiakov obsahuje jednu z nasledujúcich úloh:

– Zostavte konvexný aj nekonvexný osemboký hranol.
– Zostavte pravidelný hranol a antihranol s päťuholníkovými podstavami (antihranol má všetky bočné steny rovnostranné trojuholníky a dve zhodné rovnobežné podstavy).
– Zostavte dve telesá (jedno bude ihlan, druhé nie), ktorých všetky steny sú rovnoramenné (nie rovnostranné, nie pravouhlé) trojuholníky.
– Zostavte polopravidelné teleso, ktoré vznikne tak, že z kocky odrežeme všetky jej vrcholy rovinami prechádzajúcimi stredmi tých hrán, ktoré vychádzajú z daného vrcholu.
– Zostavte zrezaný ihlan.
– Zostavte archimédovské teleso Truncated Octahedron - jeho steny sú pravidelné šesťuholníky a štvorce, pričom šesťuholníkov je viac. Je to polopravidelné teleso, možno ho vpísať do guľovej plochy.

U zostrojených telies majú žiaci určiť počet vrcholov, stien, hrán a rozhodnúť, či pre ne platí Eulerova veta. Ďalej majú načrtnúť sieť telesa a vypočítať jeho povrch.

Skúsenosti: Úlohy sú zámerne zostavené tak, aby žiaci museli porozmýšľať nad tým, ako požadované telesá vyzerajú a ako ich zložia pomocou stavebnice. Popis telies, Eulerova veta a sieť nerobia veľké problémy, tie sa objavia až pri výpočte povrchu telesa. Rozmery telesa je totiž potrebné odmerať, no diely stavebnice nemajú presné ohraničenie. Preto sa stáva, že žiaci odmerajú rôzne strany pre mnohouholníky, ktoré sa spájajú, teda logicky musia mať rovnakú dĺžku. Aktivita je naplánovaná na jednu vyučovaciu hodinu.

2.6 Štvorrozmerná kocka (teserakt)

Pomôcky: prezentácia s pripravenými obrázkami, animáciami a tabuľkami, plastelína a špajle, drôtený model kocky, poviedka

Ciele:

– rozvíjanie abstraktného myslenia prechodom od jednoduchších modelov k zložitejším,
– rozvíjanie priestorovej predstavivosti, kombinatorického a logického myslenia.
–

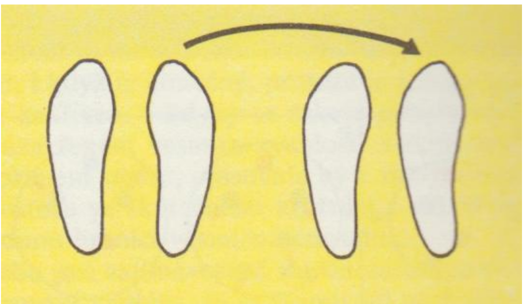
Námet: námetom pre túto tému sa pre nás stala prednáška Josefa Molnára na EXODe Pytagoras v Hutách v roku 1996, doplnili sme ju štúdiom viacerých zdrojov, najmä Havlíček (1965), Opava (1989), Sunn (2003) a www.math.union.edu.

Úvod: V geometrii je teserakt 4-rozmerná analógia kocky. Predpokladá sa, že slovo teserakt vymyslel Charles Howard Hinton. Medzi štvorrozmernou kockou a kockou je vzťah ako medzi kockou a štvorcom. Práve táto analógia umožňuje vytvárať abstraktné konštrukcie v štvorrozmernom priestore. Téma je pochopiteľne mimo obsahu stredoškolského učiva, môže však byť jeho vítaným spestrením a rozšírením. Realizovali sme ju na hodinách matematiky u žiakov kvarty a sexty osemročného štúdia. Žiakom štvorročného štúdia sme túto tému ponúkli v rámci Galejáckeho dňa, kde učitelia i žiaci ponúkajú aktivity na rôzne témy a poslucháči si podľa záujmu vyberajú, ktoré aktivity absolvujú. Na celú aktivitu vrátane záverečného čítania sci-fi poviedky sú potrebné dve vyučovacie hodiny. Vzhľadom na väčší rozsah je nasledujúci text členený na menšie časti. Vyučujúci si môže vybrať, ktoré z nich skúsi žiakom predložiť. Závisí to najmä od zloženia skupiny a úrovne ich abstraktného myslenia, ale aj od toho, nakoľko ich téma zaujme a koľko času je k dispozícii. Aj keď v nasledujúcom texte používame slovo prednáška na pomenovanie celej aktivity, rozhodne táto aktivita nemá mať charakter suchopárnej prednášky, ale heuristického výkladu. Žiakov je možné od začiatku do konca aktívne zapájať, aby všetky poznatky objavovali sami, učiteľ má byť len sprievodcom celou témou, tým, kto neustále kladie otázky a čaká na odpovede.

Popis:

1. Ako dobehnúť dvojrozmerné bytosti

Človek je tvor trojrozmerný a každá predstava štvorrozmerného priestoru je preňho nepochopiteľná. Skúsme si vysvetliť, prečo. Predstavme si, že niekde existujú dvojrozmerné bytosti, ktoré netušia o existencii tretieho rozmeru. Žijú si vo svojej rovine, ktorá je pre ne tým, čím je pre nás trojrozmerný priestor. A teraz sa pozrime na obrázok, ktorý znázorňuje ich pravú a ľavú topánku:



Obrázok 23 Pravá a ľavá topánka

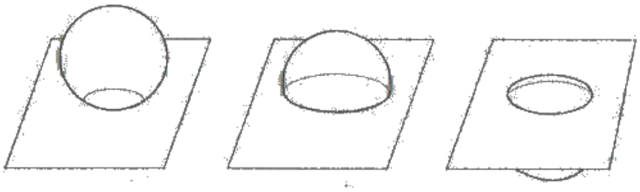
Prameň: Opava, 1989, s. 240

Keby týmito topánkami pohybovali dvojrozmerné bytosti akokoľvek, zostala by ľavá topánka ľavou a pravá pravou. Ale keby do ich života zasiahol niekto z nás trojrozmerných, zdvihol pravú topánku do trojrozmerného priestoru, tu ju preklopil a vrátil späť, dvojrozmerné bytosti by zbadali, že sa z pravej topánky stala ľavá, ako to vidno na obrázku. Čo myslíte, môžu túto premenu dvojrozmerné bytosti pochopiť? Nemôžu, pretože netušia, že existuje niečo pod a nad ich rovinou. A v podobnej situácii sme i my, trojrozmerné bytosti, vzhľadom k štvorrozmernému priestoru. Tiež si nevieme predstaviť, že by sa mohla naša ľavá topánka preniesť do štvorrozmerného priestoru, tu sa „preklopiť" a vrátiť sa späť ako pravá topánka. Dvojrozmerným bytostiam by sme mohli pripraviť aj iné prekvapenia. Napríklad by sme im z uzavretej miestnosti (čo je napríklad obdĺžnik) vysťahovali nábytok na chodbu bez otvorenia dverí a porušenia stien miestnosti jednoducho tým, že by sme nábytok preniesli do trojrozmerného priestoru a položili späť za steny ich miestnosti. Rovnako by však štvorrozmerné bytosti mohli u nás beztrestne vykrádať trezory – čo vy na to?

Skúsenosti: Táto úvodná časť prednášky veľmi dobre poslúžila na upútanie pozornosti, mladších žiakov sme nechali navrhnúť, čo ešte by mohli „vyviesť" dvojrozmerným bytostiam, resp. čo by mohli štvorrozmerné bytosti vyviesť nám. Niektoré nápady zneli ako z akčných filmov.

2. Ako sa môže prejaviť pohyb telesa z vyššieho rozmeru

Vráťme sa k dvojrozmerným bytostiam žijúcim vo svojej rovine. Predstavme si, že sa k tejto rovine zhora približuje modrá guľa, teda trojrozmerné teleso. Môžu ho dvojrozmerné bytosti zbadať? Nemôžu, pretože nič nad ich rovinou pre ne neexistuje. Až v momente, keď sa guľa dotkne roviny, zbadajú, že sa zrazu v ich rovine objavil modrý bod, ktorý sa rozširuje do kruhu. V priebehu ďalšieho prechodu sa kruh opäť zmrští v bod a nakoniec celkom zmizne.



Obrázok 24 Prechod gule rovinou

Prameň: Sunn, 2003, s. 66

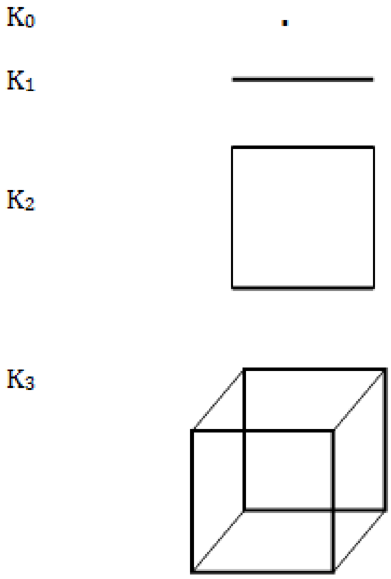
Z pozorovania kruhu, ktorý sa v rovine objaví a zase zmizne, nemôžu dvojrozmerné bytosti vyvodiť žiadne závery o skutočných príčinách, ktoré viedli k objaveniu kruhu – nemôžu totiž guľu zbadať ani inak vnímať. Uvedomme si, že tieto bytosti interpretujú pohyb gule nesprávne, ako vznik a zánik kruhu. Ten však v skutočnosti nevznikol ani nezanikol, len existujúce teleso putovalo rovnomerným pohybom cez rovinu. Príčinou zdanlivej zmeny v dvojrozmernom svete teda bol pohyb, nie skutočná zmena vo vyššom, trojrozmernom svete. Čo ak vznik a zánik v našom svete nie je žiadny proces zmeny, ale len pohyb nemenných telies štvrtou dimenziou?

Skúsenosti: Túto časť sme prezentovali len starším žiakom. Pochopiť, ako dvojrozmerné bytosti vnímajú prechod gule cez ich rovinu, prípadne vysvetliť, ako by jednorozmerné bytosti vnímali prechod kruhu cez ich priamku im nerobilo veľké problémy. Avšak záverečná otázka o našom priestore ich zaskočila. Na ilustráciu sme použili aj animácie z internetu. Na webovej stránke http://www.math.union.edu/~dpvc/math/4D/sphere-slice/welcome.html môžeme animovať spomínaný prechod gule rovinou. Zároveň tu môžeme ukázať aj animáciu, ako by sme my mohli vnímať, keby našim priestorom rovnomerným pohybom prechádzala štvorrozmerná guľa. Keďže žiakov téma zaujala a mali sme dosť času, vyzvali sme ich, aby si predstavili, čo by dvojrozmerné bytosti videli, keby ich rovinou prechádzala trojrozmerná kocka. Rýchlo prišli na to, že to záleží od toho, v akej polohe voči rovine sa kocka nachádza. Najjednoduchšiu situáciu – stena kocky rovnobežná s rovinou – popísali bez problémov. Zložitejšie situácie sa pokúšali modelovať s použitím drôteného modelu kocky, sú však náročné na priestorovú predstavivosť. Napokon sme riešenie ukázali pomocou animácií na stránke http://www.math.union.edu/~dpvc/math/4D/cube-flatland/welcome.html.

3. Ako zostrojiť model štvorrozmernej kocky

Matematici sa radi venujú veciam, ktoré sú pre obyčajných smrteľníkov nepochopiteľné. A tak hoci nikto nikdy štvorrozmernú kocku nevidel a ani neuvidí, matematikom to

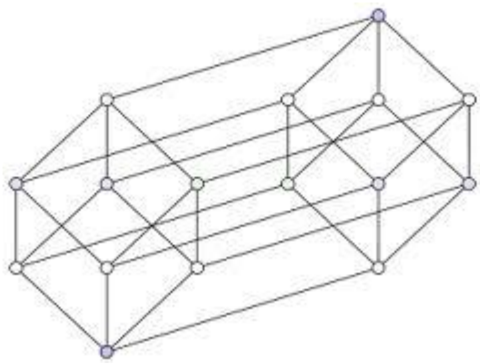
nebráni v tom, aby počítali, koľko má vrcholov, stien, hrán, či dokonca, aký má objem a ako by sme ju zostrojili, keby sme to vedeli. Takže, poďme na to!
Pomôžeme si analógiou medzi trojrozmernou kockou (K_3), štvorcom – ten môžeme považovať za dvojrozmernú kocku (K_2), úsečkou – jednorozmerná kocka (K_1) a bodom (K_0). Ako z bodu urobíme úsečku? Tak, že vezmeme dva rôzne body a spojíme ich. Ako z úsečky vznikne štvorec? Tak, že vezmeme dve zhodné úsečky, vhodne umiestnené na rovnobežných priamkach a spojíme odpovedajúce si vrcholy. Podobne z dvoch zhodných štvorcov ležiacich v rovnobežných rovinách môžeme vytvoriť kocku pospájaním vrcholov.



Obrázok 25 Vytvorenie trojrozmernej kocky

Prameň: vlastný návrh

Nič nám teda nebráni analogicky zostrojiť aj model štvorrozmernej kocky – stačí vziať dve zhodné kocky umiestnené v dvoch rovnobežných rôznych priestoroch (ja viem, že sa to nedá, ale tvárme sa, že áno), vhodne ich natočiť a pospájaním odpovedajúcich si vrcholov dostaneme K_4.



Obrázok 26 Vytvorenie štvorrozmernej kocky

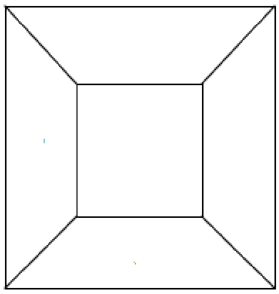
Prameň: http://library.kiwix.org/wikipedia_cs_all/I/Hypercubecubes.svg.png

Na stránke http://www.math.union.edu/~dpvc/math/4D/hcube-ortho/welcome.html nájdeme aj animáciu.

Skúsenosti: Toto je kľúčová časť prednášky. Použitá metóda analógií umožňuje postupovať názorne krok za krokom od jednoduchého modelu k zložitému. V každej skupine sa našli žiaci, ktorí sa už s témou štvorrozmernej kocky stretli a chceli ju hneď nakresliť na tabuľu. Považujeme však za dôležité nedať sa na tomto mieste strhnúť nadšením týchto žiakov, ale postupovať pomaly, aby aj tí ostatní mali možnosť sami objaviť, ako model štvorrozmernej kocky vznikne.

4. Ako vyzerá graf a sieť štvorrozmernej kocky

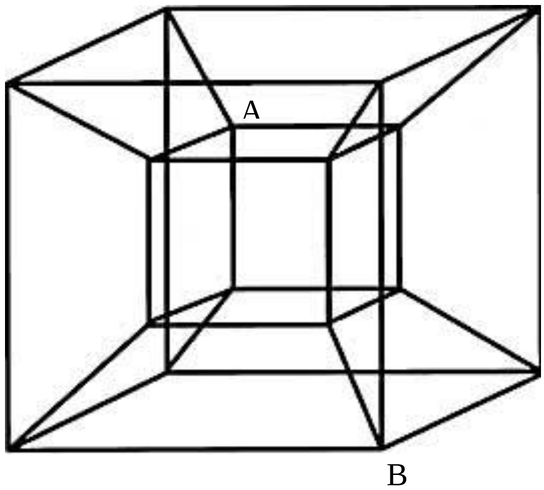
Zobrazenie na predchádzajúcom obrázku je dosť neprehľadné, preto skúsme ešte jeden spôsob – tzv. graf kocky. Horná podstava sa zobrazí ako menší štvorec, dolná podstava ako väčší štvorec a to, čo vidíte ako lichobežníky, sú v skutočnosti tiež štvorce – bočné steny (pravá, ľavá, predná a zadná).



Obrázok 27 Graf trojrozmernej kocky

Prameň: vlastný návrh

Rovnako teraz znázorníme aj K_4 – potrebujeme jednu menšiu kocku, jednu väčšiu kocku a pospájame odpovedajúce si vrcholy.



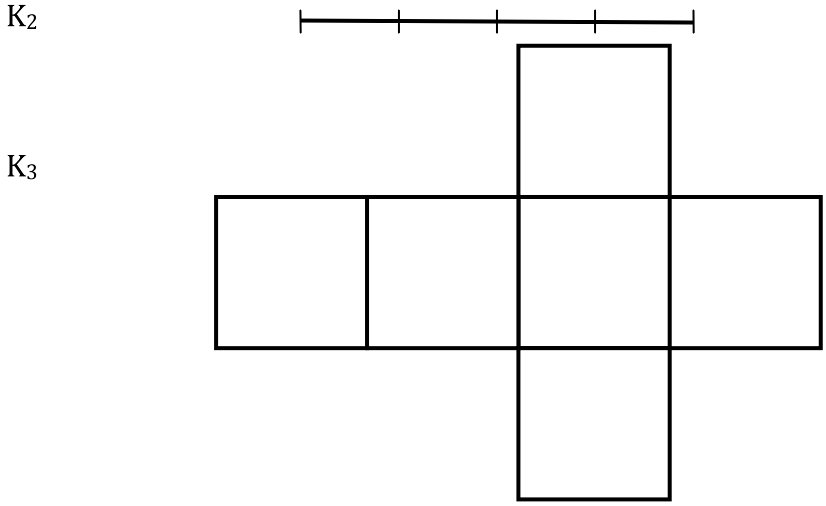
Obrázok 28 Graf štvorrozmernej kocky

Prameň: vlastný návrh

Z čoho sa vlastne K_4 skladá? Keď sa dobre pozriete, zistíte, že z 8 kociek K_3 – hornej, dolnej, pravej, ľavej, prednej, zadnej, vnútornej, vonkajšej. Pritom všetkých osem kociek je rovnako veľkých, podobne ako všetky steny obyčajnej kocky sú rovnaké štvorce.

Čo by ste nazvali stenovou a telesovou uhlopriečkou v K_4? „Stenovou“ je teraz ktorákoľvek telesová uhlopriečka v K_3. Telesovou je napríklad úsečka AB – spája horný zadný ľavý vrchol vnútornej kocky s dolným predným pravým vrcholom vonkajšej kocky.

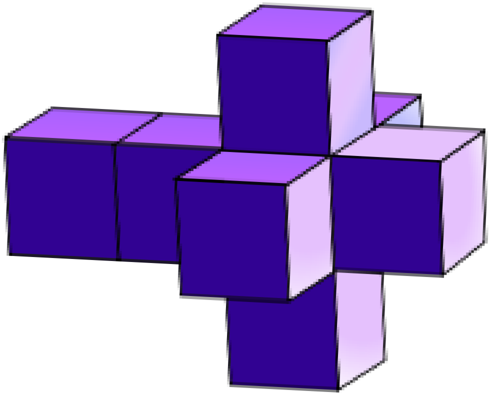
Skúsme vytvoriť sieť štvorrozmernej kocky – opäť pomocou analógie. Sieť kocky K_3 poznáte – vznikne rozložením stien do roviny, teda do priestoru o jednu dimenziu nižšieho. Čo by mohlo byť sieťou štvorca? Rozloženie jeho strán do priestoru o jednu dimenziu nižšieho, teda na priamku:



Obrázok 29 Sieť štvorca a kocky

Prameň: vlastný návrh

O sieti kocky K_3 si môžeme predstaviť, že vznikla zo siete štvorca nasledovne: nad každou zo štyroch úsečiek sme zostrojili štvorec a pridali dva štvorce do ďalšieho rozmeru, teda nahor a nadol. Podobne vytvorme sieť K_4 – nad každým štvorcom v sieti K_3 zostrojíme kocku a pridáme dve kocky do ďalšieho rozmeru, teda dopredu a dozadu.



Obrázok 30 Sieť kocky K_4

Prameň: http://www.fornax.sk/~srnka/img/blog/Tesseract2.png

Skúsenosti: Keďže sieť kocky je žiakom dobre známa, táto časť nerobila problémy. Naopak s grafom kocky nemajú veľa skúseností. Vytvorený graf štvorrozmernej kocky považujeme za jej najvhodnejšie zobrazenie, preto sme ho zaradili do našej prednášky. U mladších žiakov sme sa ho pokúsili pomocou plastelíny a špajlí vymodelovať. Žiaľ, plastelína bola príliš mäkká na to, aby udržala model pokope. Časť o stenových a telesových uhlopriečkach sme u mladších žiakov vynechali.

5. Poďme počítať

V matematike vraj všetko so všetkým súvisí. Skúsme nájsť súvislosti medzi počtami vrcholov, hrán, stien atď. vyplnením tejto tabuľky:

Tabuľka 1 Popis kociek

	vrcholy	**hrany**	**steny**	**telesá K_3**	**telesá K_4**	**spolu**
K_0	$1 = 2^0$	0	0	0	0	$1 = 3^0$
K_1	$2 = 2^1$	1	0	0	0	$3 = 3^1$
K_2	$4 = 2^2$	4	1	0	0	$9 = 3^2$
K_3	$8 = 2^3$	12	6	1	0	$27 = 3^3$
K_4	$16 = 2^4$	32	24	8	1	$81 = 3^4$

Prameň: vlastný návrh

Žiakov necháme dopĺňať údaje do tabuľky. Po vyplnení prvého stĺpca ich navedieme k objavu, že ide o mocniny čísla dva. Rovnako po vyplnení posledného stĺpca objavíme mocniny čísla tri.

Nuž a ako by sa asi počítal štvorrozmerný objem a povrch? Opäť si pomôžeme analógiou.

Tabuľka 2 Vzorce na výpočty objemov a povrchov

	„objem“	**„povrch“**
K_1	a	-
K_2	a^2	$4a$
K_3	a^3	$6a^2$
K_4	a^4	$8a^3$

Prameň: vlastný návrh

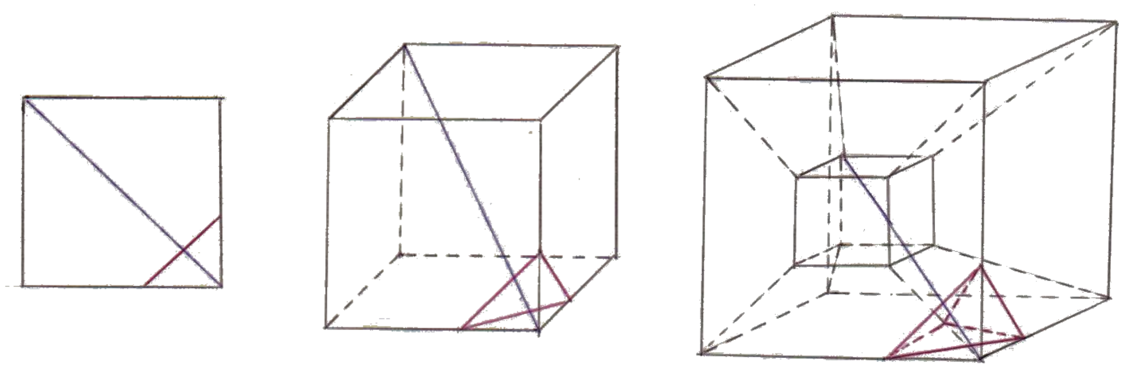
Skúsenosti: Obľúbená časť prednášky, žiaci aktívne spolupracujú pri vypĺňaní tabuľky. Vyzývame ich, aby vysvetlili, ako vypočítali počty hrán a stien u K_4. Závery s mocninami čísel dva a tri sú pre nich prekvapujúce, často sú nimi fascinovaní. Pre učiteľa je to príležitosť poukázať na vnútornú krásu matematických štruktúr. Starších žiakov môžeme vyzvať, aby sa pokúsili doplniť tabuľku o ďalší riadok, teda o päťrozmernú kocku – bude mať 32 vrcholov, 80 hrán, 80 stien, 40 trojrozmerných kociek, 10 štvorrozmerných kociek a jednu päťrozmernú kocku, spolu 243 prvkov. Ak mladší žiaci ešte nepoznajú dobre mocniny, vystačíme si s vysvetlením, že každé číslo v prvom stĺpci je dvojnásobkom predchádzajúceho čísla, podobne je to aj s posledným stĺpcom. Tabuľku s objemami a povrchmi môžeme v takejto triede vynechať.

6. Poďme rezať

Nie však nožíkom, ale rovinou kolmou na telesovú uhlopriečku. Teda správnejšie:

- rezom štvorca priamkou kolmou na jeho uhlopriečku je úsečka,
- rezom kocky rovinou kolmou na jej telesovú uhlopriečku je rovnostranný trojuholník,

- rezom K_4 priestorom kolmým na „telesovú" uhlopriečku môže byť štvorsten. Ak však priestor rezu posunieme viac k stredu K_4, dostaneme zložitejšie teleso, ktorého steny tvoria 4 rovnostranné trojuholníky a 4 pravidelné šesťuholníky. Napokon režme rovinou (a priestorom) kolmou na telesovú uhlopriečku, presne cez stred telesa. V K_3 dostaneme rovnostranný trojuholník, ktorého strany sú stenovými uhlopriečkami kocky. V K_4 by sme teda mali dostať pravidelné teleso, ktorého steny tvoria takéto trojuholníky. Týmto telesom je osemsten.



Obrázok 31 Rezy telies

Prameň: vlastný návrh

Skúsenosti: Náročná časť, ktorú robíme iba so staršími žiakmi a aj to len v prípade, že máme dosť času a žiaci sú ešte dostatočne vnímaví. Od žiakov nepožadujeme zostrojovanie rezov, máme pripravené obrázky a diskutujeme o nich.

6. Poďme čítať

Na záver celej prednášky máme pripravenú sci-fi poviedku, v ktorej sa dozvieme, ako to dopadlo, keď sa jeden architekt pri stavbe domu nechal inšpirovať práve štvorrozmernou kockou – teseraktom. Poviedku napísal Róbert A. Heinlein. V podobe kresleného komiksu pod názvom Bol raz jeden domček vychádzala v časopise Elektrón v roku 1987, neskôr vyšla aj v súbornom diele ilustrátora Josefa Scheka (2003). Práve tento komiks dáme žiakom k dispozícii, aby si ho vo dvojiciach prečítali.

Skúsenosti: Na prečítanie 24 – stranového komiksu treba počítať s časovou rezervou 20 minút. Je to veľmi zaujímavá bodka za celou aktivitou, ktorá má u žiakov pozitívny ohlas a rozprúdi diskusiu.

ZÁVER

Otázka prístupu k vyučovaniu geometrie a s ním aj k rozvoju priestorovej predstavivosti nestráca časom na svojej aktuálnosti. Práve naopak, venuje sa jej stále viac pozornosti. Zvoliť správne a vhodné vyučovacie metódy a formy je neustálou výzvou pre učiteľov matematiky. Malým príspevkom k tejto problematike by mohla byť aj naša práca.

Podrobne sme popísali šesť aktivít manipulatívnej geometrie, v ktorých sme sa snažili zdôrazniť myšlienky konštruktivizmu – vlastné objavovanie žiakmi, rozvoj tvorivosti, schopnosti hľadania riešiteľských stratégií, abstrakcie atď. Prostriedkom k tomu bola práca žiakov so stavebnicami a modelovanie telies. Pozitívne skúsenosti z vyučovacích hodín potvrdzujú, že ide o vhodný spôsob, ako žiakov motivovať k práci na hodinách geometrie, povzbudiť ich záujem a rozvíjať ich schopnosti.

Veríme, že práca môže inšpirovať aj ďalších učiteľov matematiky na základných a stredných školách k tomu, aby vyskúšali naše osvedčené, i keď možno menej známe aktivity.

ZOZNAM BIBLIOGRAFICKÝCH ZDROJOV

1. HAVLÍČEK, K. 1965. Prostory o čtyřech a více rozměrech. Praha, Mladá fronta. 1965

2. MOLNÁR, J. – PERNÝ, J. – STOPENOVÁ, A. 2006. Prostorová představivost a prostředky k jejímu rozvoji. Praha, JČMF. 2006

3. OPAVA, Z. 1989. Matematika kolem nás. Praha, Albatros. 1989

4. PLŠKOVÁ, Z. 2010. Rozvoj prostorové představivosti žáků ZŠ (disertační práce). Olomouc, Univerzita Palackého. 2010

5. PŘÍHODA, P. 1983. Sluneční hodiny. Praha, Horizont. 1983

6. SCHEK, J. 2003. Velká kniha komiksů. Praha, BB art.2003. ISBN: 80-7341-068-0

7. SUNN, F. 2003. Duch počítače. Praha, Eugenika. 2003. ISBN: 80-89115-35-7

8. VALLO, D. – RUMANOVÁ, L. – VIDERMANOVÁ, K. – VARGA, M. – BARCÍKOVÁ, E. – KLEPANCOVÁ, M. 2012. Geometria telies... všeobecne a pútavo. Nitra, FPV UKF. 2012. ISBN: 978-80-558-0106-5

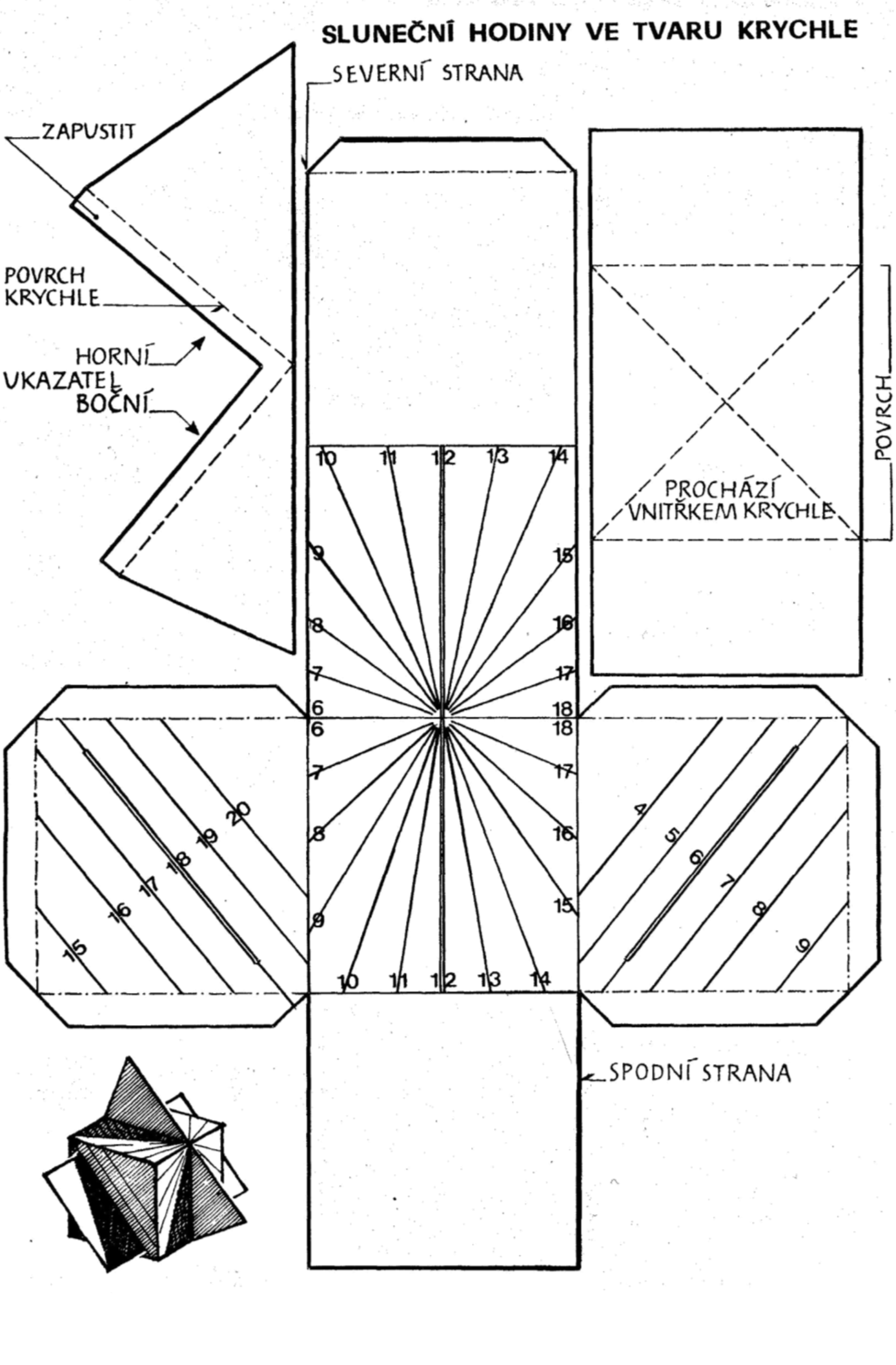
9. ZELINKA, B. 1979. Matematika hrou i vážně. Praha, Mladá fronta. 1979

Internetové zdroje

10. ROBOVÁ, J. 2009. Programy dynamické geometrie a jejich využití ve výuce stereometrie [online]. webmatika.sk, [cit. 26.4.2014]. Dostupné na www: http://www.webmatika.sk/zbornik-1/clanky/Robova_prispevek.pdf

ZOZNAM PRÍLOH

Príloha 1 Vystrihovačka slnečné hodiny



Prameň: Příhoda, 1983

Príloha 2 Pracovný list k stavebnici Domy

<table>
<tr><td colspan="2">Mená:</td><td>Trieda:</td><td>Dátum:</td></tr>
<tr><td colspan="4">Zadanie: Postavte si model vlastného domu, v akom by ste možno chceli bývať (použite 3 až 6 dielov stavebnice).</td></tr>
<tr><td colspan="3">Úloha 1: Z ktorých dielov ste dom postavili? Použite matematicky presné pomenovanie jednotlivých telies.</td><td>Hodno tenie:
1.</td></tr>
<tr><td rowspan="2">Úloha 2: Znázornite dom vo voľnom rovnobežnom premietaní.</td><td colspan="2" rowspan="4">Úloha 3: Znázornite nárys (pohľad spredu), pôdorys (pohľad zhora) a bokorys (pohľad sprava) vášho domu vo štvorcovej sieti.</td><td>2.</td></tr>
<tr><td>3.</td></tr>
<tr><td rowspan="2">Úloha 4: Z nasledujúcich tvrdení o vašom dome zakrúžkujte tie, ktoré sú pravdivé (1 cm na modeli odpovedá 1 m):
a) Dom má výšku aspoň 9 metrov.
b) Dom má obdĺžnikový pôdorys.
c) Dom je rovinovo súmerný.
d) Dom nemá štvorcovú podstavu.
e) Dom má výšku najviac 7 metrov.</td><td>4.</td></tr>
<tr><td>Spolu:</td></tr>
</table>

Príloha 3 Pracovný list k stavebnici Polydron

<table>
<tr><td>mená:</td><td>dátum:</td><td>trieda:</td></tr>
<tr><td colspan="3">úloha: Zostavte pravidelný hranol a antihranol s päťuholníkovými podstavami (antihranol má všetky bočné steny rovnostranné trojuholníky a dve zhodné podstavy ležiace v rovnobežných rovinách).</td></tr>
<tr><td colspan="3">popis telesa: hranol
počet vrcholov -
počet hrán -
počet stien -
Platí pre toto teleso Eulerova veta?
áno - nie

antihranol
počet vrcholov -
počet hrán -
počet stien -
Platí pre toto teleso Eulerova veta?
áno - nie</td></tr>
<tr><td colspan="3">náčrt siete telesa:
hranol
antihranol</td></tr>
<tr><td colspan="3">výpočet povrchu telesa:
hranol
antihranol</td></tr>
</table>