Moderné vzdelávanie pre vedomostnú spoločnosť / Projekt je spolufinancovaný zo zdrojov EÚ

RNDr. Mária Kredátusová, PhD.

Využitie programu Derive 6 pri vyučovaní lineárnych funkcií

Osvedčená pedagogická skúsenosť edukačnej praxe

Prešov
2014

Vydavateľ:	Metodicko-pedagogické centrum, Ševčenkova 11, 850 01 Bratislava
Autor OPS/OSO:	RNDr. Mária Kredátusová, PhD.
Kontakt na autora:	Gymnázium J. A. Raymana, Mudroňova 20, Prešov kredatusova@gjar-po.sk, kredatusova@yahoo.com
Názov OPS/OSO:	Využitie programu Derive 6 pri vyučovaní lineárnych funkcií
Rok vytvorenia OPS/OSO:	2014 IX. kolo výzvy
Odborné stanovisko vypracoval:	Mgr. Emília Purdešová

Za obsah a pôvodnosť rukopisu zodpovedá autor. Text neprešiel jazykovou úpravou.

Táto osvedčená pedagogická skúsenosť edukačnej praxe bola vytvorená z prostriedkov národného projektu Profesijný a kariérový rast pedagogických zamestnancov.

Projekt je financovaný zo zdrojov Európskej únie.

Kľúčové slová

program Derive 6, lineárna funkcia, graf lineárnej funkcie, súradnice bodov, priesečníky grafu funkcie so súradnicovými osami, vlastnosti funkcie, vplyv reálnych parametrov „a“ a „b“ na vlastnosti lineárnej funkcie y = ax + b, predpis (rovnica) funkcie; grafické riešenie lineárnych rovníc, grafické riešenie lineárnych nerovníc.

Anotácia

Práca je venovaná aplikácii programu Derive 6 do vyučovacieho predmetu Matematika pri téme Lineárne funkcie. Opisujú sa v nej možnosti práce s uvedeným programom pri výpočte súradníc bodov patriacich grafu lineárnej funkcie, pri kreslení grafov lineárnych funkcií a skúmaní niektorých ich vlastností, pri hľadaní predpisu lineárnej funkcie. V práci je opísané aj využitie programu Derive 6 pri grafickom riešení lineárnych rovníc a lineárnych nerovníc. Práca je určená učiteľom matematiky na stredných aj základných školách.

Akreditované programy kontinuálneho vzdelávania

Názov akreditovaného vzdelávacieho programu KV	Číslo akreditovaného vzdelávacieho programu KV
Využívanie informačno-komunikačných technológií vo vyučovaní	52/2010 – KV
Edukačný softvér v matematike	121/2010 – KV
Výučba matematiky s podporou edukačného softvéru	331/2010 – KV
IKT na hodinách matematiky	393/2010 – KV
Premena školy: Cesta od tradičného vyučovania k aktívnemu učeniu sa žiakov	698/2012 – KV

OBSAH

ÚVOD

Žijeme v dobe, kedy počítače prenikli azda už do všetkých oblastí nášho života. Svoje pevné miesto majú určite aj v školstve. V žiadnom prípade však nemožno preceňovať význam týchto nových moderných médií na úkor klasickej kriedy a tabule. Pokiaľ však chceme v škole kráčať s dobou, použitiu počítačov na vyučovacích hodinách sa z času načas nevyhneme.

V predloženej práci opisujem svoje skúsenosti s využitím programu Derive 6 na vyučovaní matematiky v prvom ročníku štvorročného, resp. piatom ročníku osemročného gymnázia. Mojím cieľom je poukázať na využitie niektorých možností programu Derive 6 najprv pri objasňovaní učiva o lineárnych funkciách a následne pri aplikácii vlastností lineárnych funkcií do grafického riešenia lineárnych rovníc a lineárnych nerovníc.

V prvej kapitole stručne charakterizujem program Derive 6, ktorý bol súčasťou 3. edukačného balíka, ktorý dostali školy z projektu Infovek v roku 2004. Popisujem, ako sa s ním pracuje, ako sa v ňom zadávajú príkazy, počítajú funkčné hodnoty, riešia rovnice, kreslia grafy, atď. Orientujem sa len na opis tých činností, ktoré prezentujem ďalej vo svojej práci. Možnosti programu Derive 6 sú však omnoho širšie.

Druhú kapitolu pokladám za akúsi „praktickú" časť predloženej práce. Rozdelila som ju na päť častí podľa piatich tém, pri ktorých vo svojej pedagogickej praxi využívam počítače pri problematike súvisiacej s lineárnymi funkciami. Neopisujem celý priebeh vyučovacích hodín, ale na konkrétnych príkladoch ukazujem aplikáciu programu Derive 6 pri jednotlivých činnostiach.

Na základe svojich skúseností som presvedčená, že pri vyučovaní témy *Lineárne funkcie* je vhodné kombinovať „klasické" metódy vyučovania (napr. výklad učiteľa a trénovanie potrebných zručností žiakov) s „modernými" metódami, pri ktorých žiaci sami skúmajú, objavujú a pokúšajú sa formulovať vlastné závery pri práci s programom Derive 6, ktorý je pre nich atraktívnou formou vyučovania. Samozrejme, všetko je to možné realizovať len v prípade vhodného technického vybavenia školy, napr. ak je k dispozícii učebňa so žiackymi PC stanicami a učiteľským PC prepojeným na dataprojektor.

V Školskom vzdelávacom programe na Gymnáziu J. A. Raymana máme tému *Lineárne rovnice, nerovnice a funkcie* zaradenú v druhej polovici prvého ročníka, resp. kvinty. Už niekoľkokrát som mala možnosť doplniť, precvičiť a upevniť učivo z tohto tematického celku aj prácou s programom Derive 6. Žiaci tak mali možnosť prostredníctvom počítača napríklad zisťovať funkčné hodnoty, riešiť rovnice a nerovnice a pracovať s grafmi. Rovnako sa žiaci naučili pomocou počítača objaviť správanie sa grafov lineárnych funkcií a neskôr uplatniť nadobudnuté poznatky o lineárnych funkciách a ich vlastnostiach pri grafickom riešení rovníc a nerovníc. Vyučovacie hodiny som realizovala v multimediálnej učebni, kde žiaci pracovali vo dvojiciach a každá dvojica pracovala na svojom počítači.
V predloženej práci uvádzam trinásť konkrétnych príkladov, ktoré som pripravila pre žiakov k spomínanej problematike, vysvetľujem spôsob ich riešenia a uvádzam ich výsledky.

Čitateľom budem vďačná za akékoľvek námety, postrehy a pripomienky k mojej práci. V prípade otázok ma, prosím, kontaktujte na adrese maria.kredatusova@gjar-po.sk alebo kredatusova@yahoo.com.

1 PROGRAM DERIVE 6

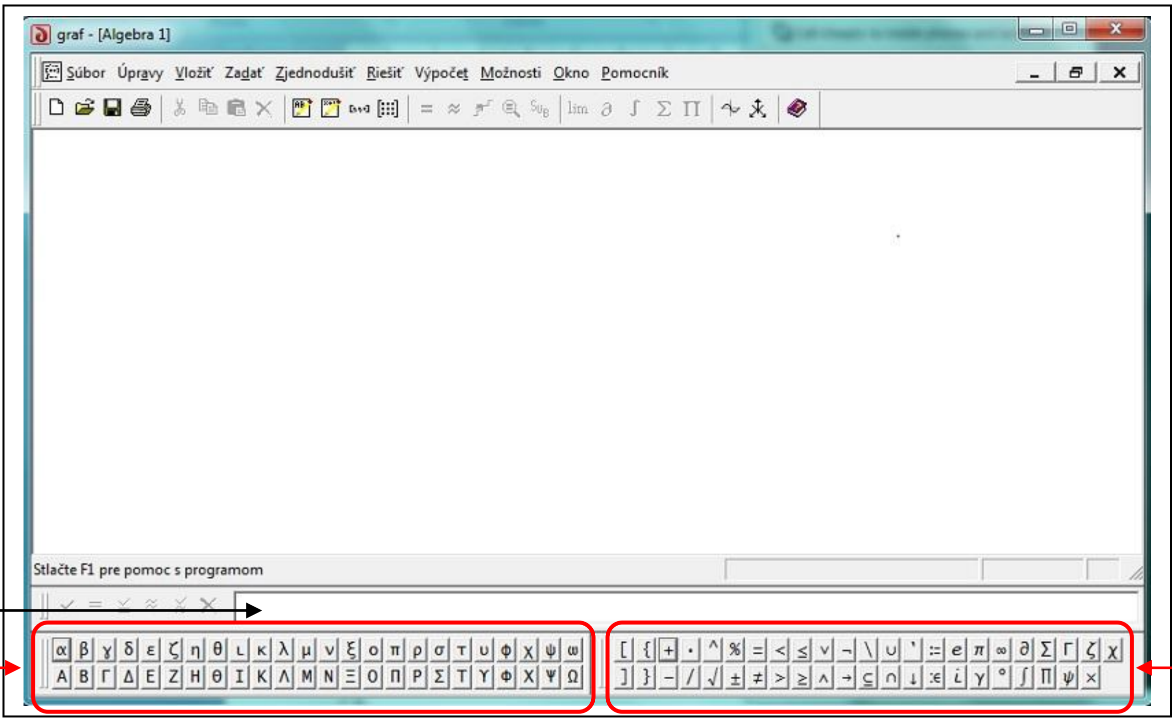
Matematický programový systém Derive bol vytvorený predovšetkým pre študentov. Jeho jednoduchosť a nízke hardvérové požiadavky ho umožňujú používať prakticky na akomkoľvek počítači.
Derive je jednoduchý program, ktorý umožňuje napríklad:

- ✓ vykonať jednoduché numerické a symbolické výpočty,
- ✓ upravovať výrazy,
- ✓ riešiť rovnice a nerovnice a tiež ich sústavy,
- ✓ kresliť grafy funkcií... a samozrejme mnoho iného.

Jeho výhodou je jednoduché ovládanie. Jednotlivé operácie možno vyvolať zo systému Menu alebo kliknutím na tlačidlo z panela nástrojov. Nie je nutné pamätať si žiadne zložité príkazy.

Po spustení programu sa otvorí základná obrazovka – okno Algebra (Obrázok 1). V ňom zadávame príkazy a prevádzame výpočty. Zhora nadol ho tvorí:

1. riadok s ponukou Menu
2. panel nástrojov – ikony (tlačidlá) jednotlivých príkazov
3. náhľad samotného okna Algebra

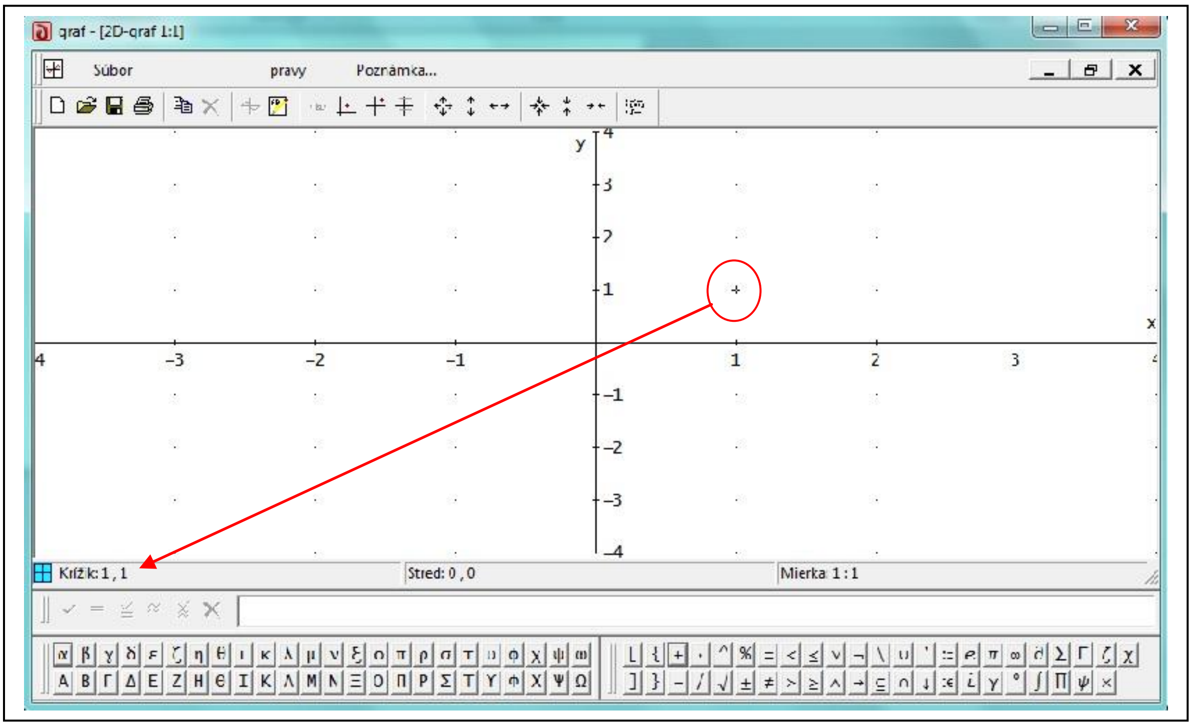


Obrázok 1 Základná obrazovka programu Derive 6 – Okno Algebra
Prameň: vlastný návrh

4. stavový riadok
5. príkazový riadok
6. grécka abeceda
7. matematické znaky.

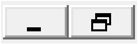
Medzi jeho nevýhody patrí obmedzená možnosť symbolického zápisu, preto je problematické jeho využitie pre zložitejšie výpočty.

Pri kreslení grafov a práci s nimi je potrebné otvoriť aj grafické okno – okno Grafika 2D. Od okna Algebra a líši riadkom s ponukou Menu (**1.**), panelom nástrojov (**2.**) a stavovým riadkom (**4.**).
V stavovom riadku je možné sledovať „polohu krížika“, teda určiť súradnice ľubovoľného bodu, v ktorom sa krížik – grafický kurzor práve nachádza (Obrázok 2). Túto možnosť môžeme využiť napríklad pri určovaní priesečníka dvojice rôznobežných priamok.

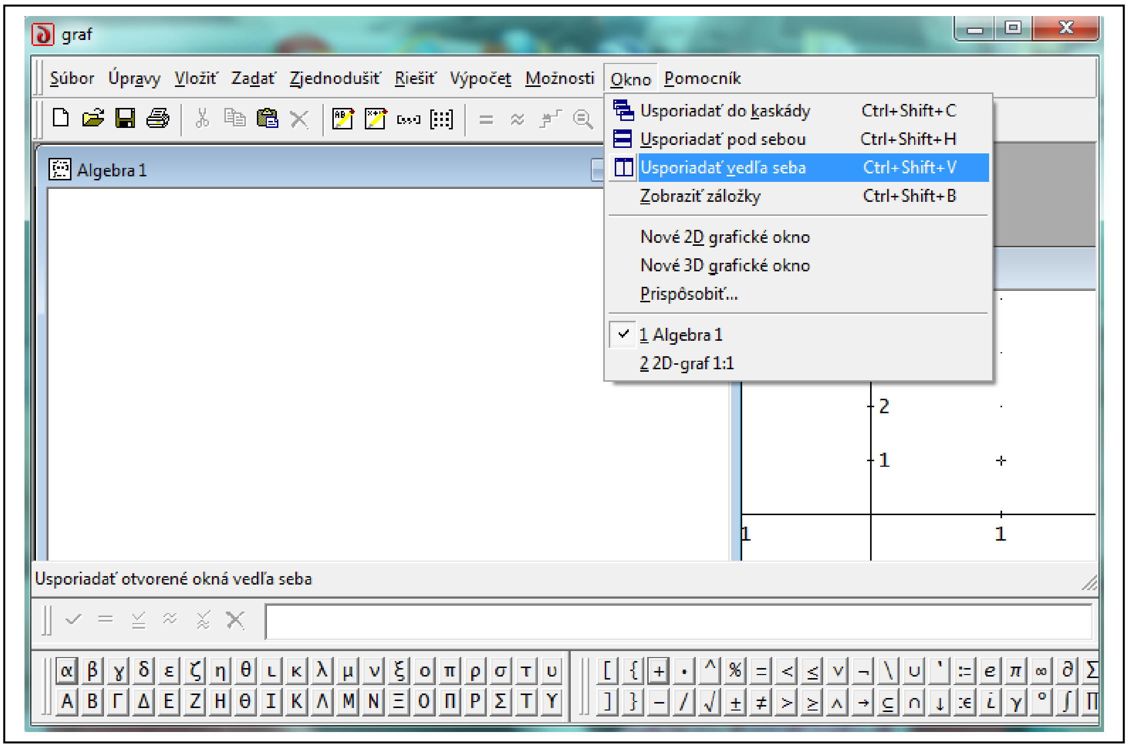


Obrázok 2 Grafická obrazovka programu Derive 6 – Okno Grafika 2D
Prameň: vlastný návrh

Grafické okno Grafika 2D sa otvára tlačidlom  z panela nástrojov okna Algebra.

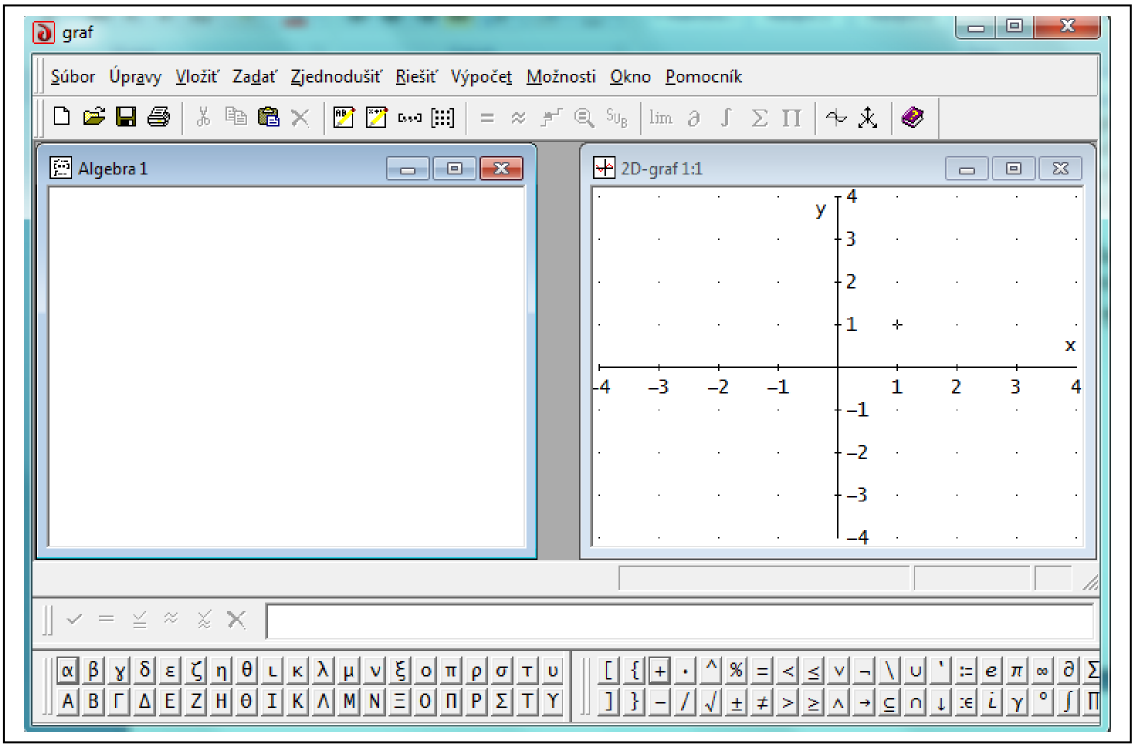
Pri postupnom zadávaní predpisov funkcií a následnom kreslení ich grafov, resp. pri grafickom riešení rovníc a nerovníc je potrebné pracovať súčasne v oboch oknách – predpisy funkcií, rovnice a nerovnice sa zadávajú v okne Algebra a grafy kreslí program Derive 6 v okne Grafika 2D. Aby sme sa nemuseli neustále „prepínať“ medzi oboma oknami, je výhodné mať na obrazovke otvorené súčasne obe okná.
Tento stav realizujeme z Menu okna Algebra tlačidlom „Okno“ a príkazom „Usporiadať vedľa seba“ (Obrázok 3). Avšak ešte pred týmto príkazom už otvorené grafické okno zmenšíme alebo sklopíme pomocou známych tlačidiel v systéme Windows: .

Podľa potreby je možné zväčšiť, prípadne zmenšiť veľkosti oboch jednotlivých okien. Opäť sa využíva v systéme Windows známa funkcia ľavého tlačidla myšky na zväčšovanie a zmenšovanie, keď má kurzor tvar obojstrannej šípky (Obrázok 4).



Obrázok 3 Súčasné otváranie okien v programe Derive 6

Prameň: vlastný návrh



Obrázok 4 Súčasne otvorené okná v programe Derive 6

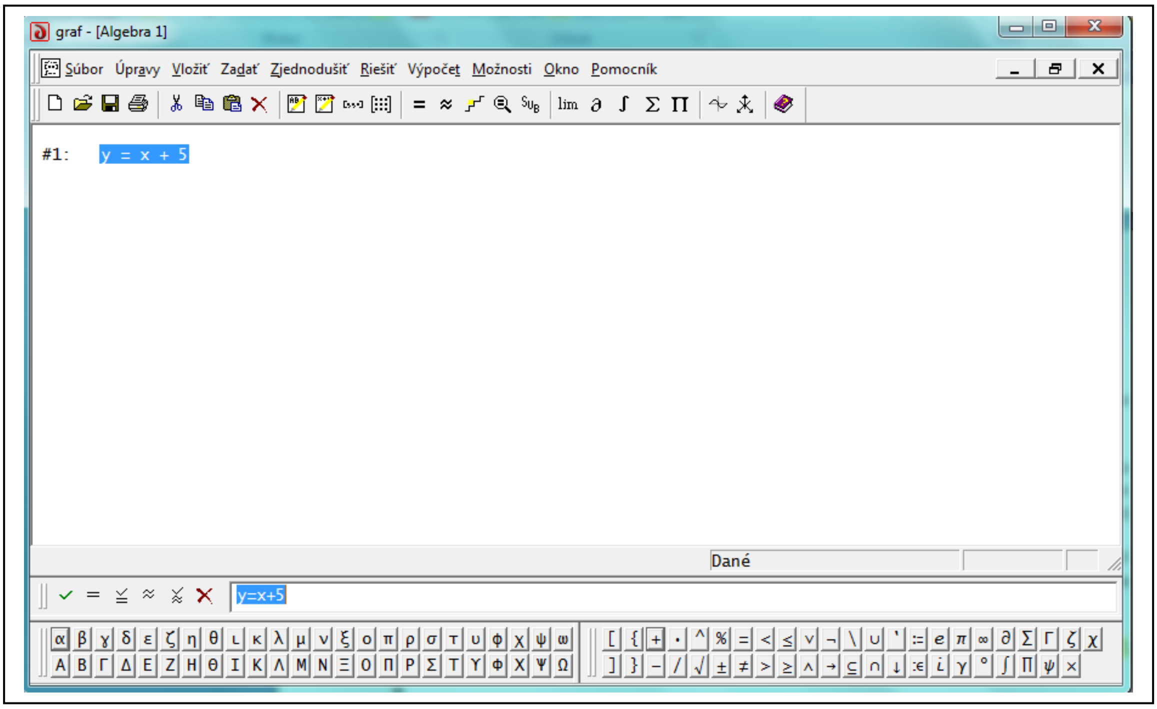
Prameň: vlastný návrh

1.1 Súradnice bodov patriacich funkcii

Pri výpočtoch súradníc bodov patriacich funkcii pracujeme len v okne Algebra programu Derive 6.

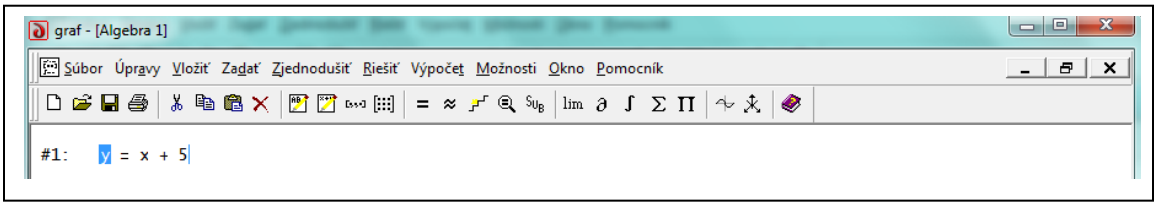
Podľa typu hľadanej súradnice (*x* alebo *y*) pri „ručnom“ výpočte riešime buď rovnicu s neznámou *x* (pri hľadaní súradnice *x*) po dosadení danej hodnoty premennej *y*, alebo počítame hodnotu výrazu s premennou y (pri hľadaní súradnice *y*) po dosadení danej hodnoty premennej x.
V programe Derive 6 nie je potrebné rozlišovať hľadanú súradnicu. Využijeme možnosť nahradenia (substitúcie) tej premennej, ktorá je daná. Následne dáme pokyn na zjednodušenie, resp. výpočet výrazu a dostaneme hodnotu hľadanej súradnice.

Postupnosť príkazov ukážem na konkrétnych úlohách z Príkladu 1 zo strany 20. V programe Derive 6 napíšeme do príkazového riadku predpis funkcie z úlohy **a)** a enterom ho odošleme do okna Algebra.



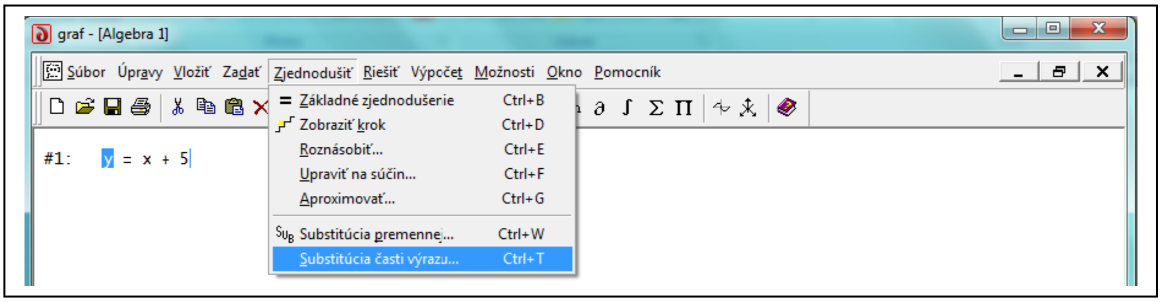
Obrázok 5 Zadanie predpisu funkcie v programe Derive 6
Prameň: vlastný návrh

Ľavým tlačidlom myšky klikáme na predpis v okne Algebra dovtedy, kým sa nevysvieti premenná *y*, ktorej hodnota je daná.



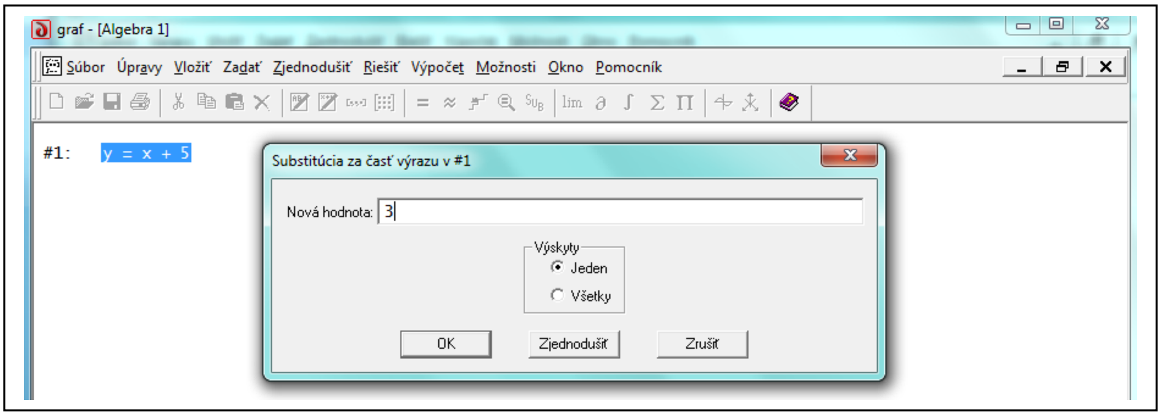
Obrázok 6 Vyznačenie premennej v predpise funkcie v programe Derive 6
Prameň: vlastný návrh

Z Menu vyberieme príkaz „Zjednodušiť“ a zvolíme možnosť „Substitúcia časti výrazu“.

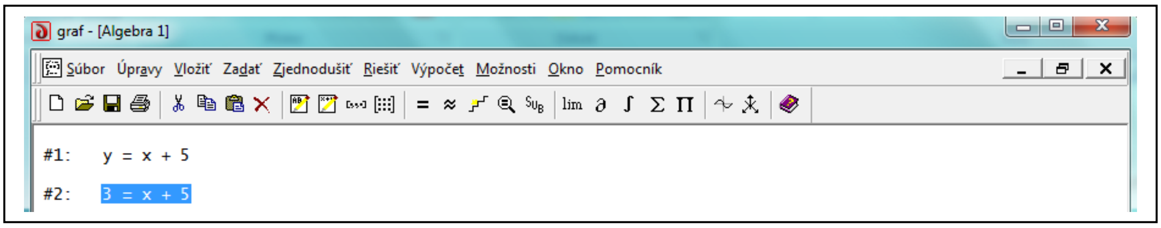


Obrázok 7 Príkaz na substitúciu premennej v predpise funkcie v programe Derive 6
Prameň: vlastný návrh

Zadáme danú hodnotu premennej *y*, t.j. číslo 3, zvolíme možnosť „výskyt pre <u>jeden</u> výraz“ a tlačidlom „O.K.“ odošleme do okna Algebra.

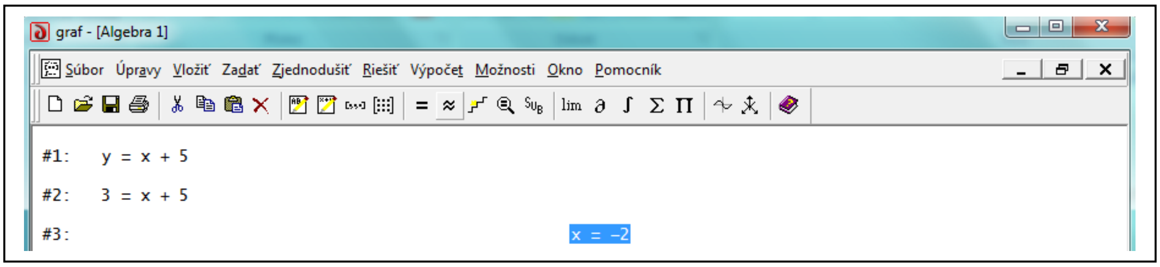


Obrázok 8 Dokončenie príkazu na substitúciu premennej v programe Derive 6
Prameň: vlastný návrh



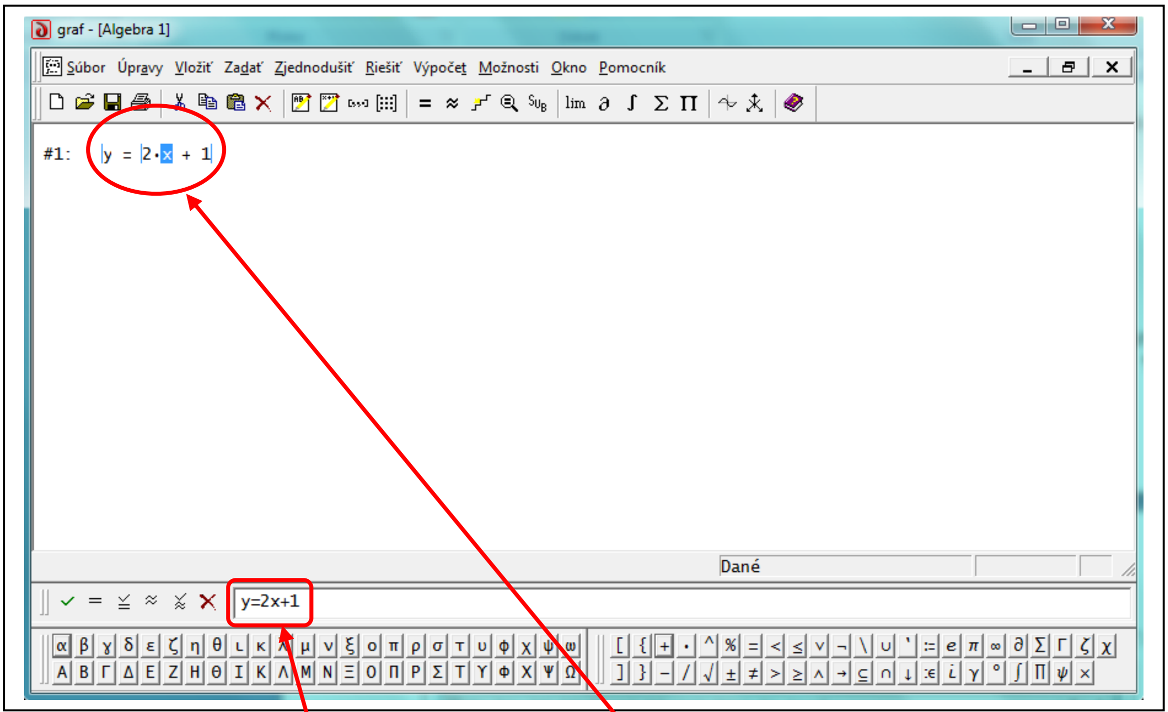
Obrázok 9 Substituovaná premenná v predpise funkcie v programe Derive 6
Prameň: vlastný návrh

Pomocou tlačidla ≈ z panela nástrojov okna Algebra vypočítame hodnotu hľadanej premennej *x*.



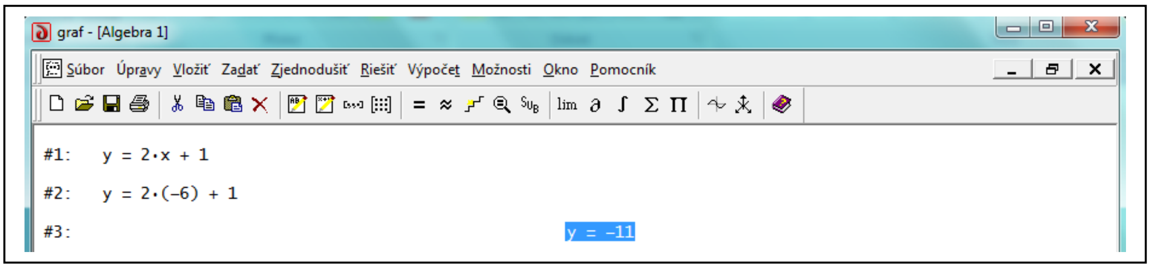
Obrázok 10 Výpočet hľadanej súradnice v predpise funkcie v programe Derive 6
Prameň: vlastný návrh

Rovnako postupujeme aj pri hľadaní súradnice *y* z Príkladu 1 úlohy **b)**. Prvé príkazy sú rovnaké.
Najprv do príkazového riadku okna Algebra napíšeme predpis funkcie a enterom ho odošleme do hlavnej časti obrazovky. Následne ľavým tlačidlom myšky klikáme na predpis v okne Algebra dovtedy, kým sa nevysvieti premenná *x*, ktorej hodnota je daná.



Obrázok 11 Zadanie predpisu funkcie a vyznačenie premennej v programe Derive 6
Prameň: vlastný návrh

Z ponuky Menu vyberieme príkaz „Zjednodušiť" a zvolíme možnosť „Substitúcia časti výrazu". Zadáme danú hodnotu premennej *x*, t.j. číslo −6, zvolíme možnosť „výskyt pre <u>jeden</u> výraz" a tlačidlom „O.K." odošleme do okna Algebra.
Nakoniec pomocou tlačidla = (čo je jediný rozdiel v porovnaní s výpočtom premennej *x*, kde sme na záver použili tlačidlo ≈) z panela nástrojov okna Algebra vypočítame hodnotu hľadanej premennej *y*.



Obrázok 12 Substituovaná premenná a výpočet hľadanej súradnice v programe Derive 6
Prameň: vlastný návrh

Pri overovaní, či body s danými súradnicami patria danej funkcii, zadáme pri „substitúcii časti výrazu" hodnotu jednej z daných súradníc a porovnáme hodnotu, ktorú vypočíta program Derive 6, s danou hodnotou druhej súradnice.

Rovnako postupujeme aj pri hľadaní priesečníkov grafu danej funkcie so súradnicovými osami. Pri hľadaní priesečníka s osou x pri „substitúcii časti výrazu“ nahradíme premennú y hodnotou nula a podobne pri hľadaní priesečníka s osou y pri „substitúcii časti výrazu“ nahradíme číslom nula premennú x.

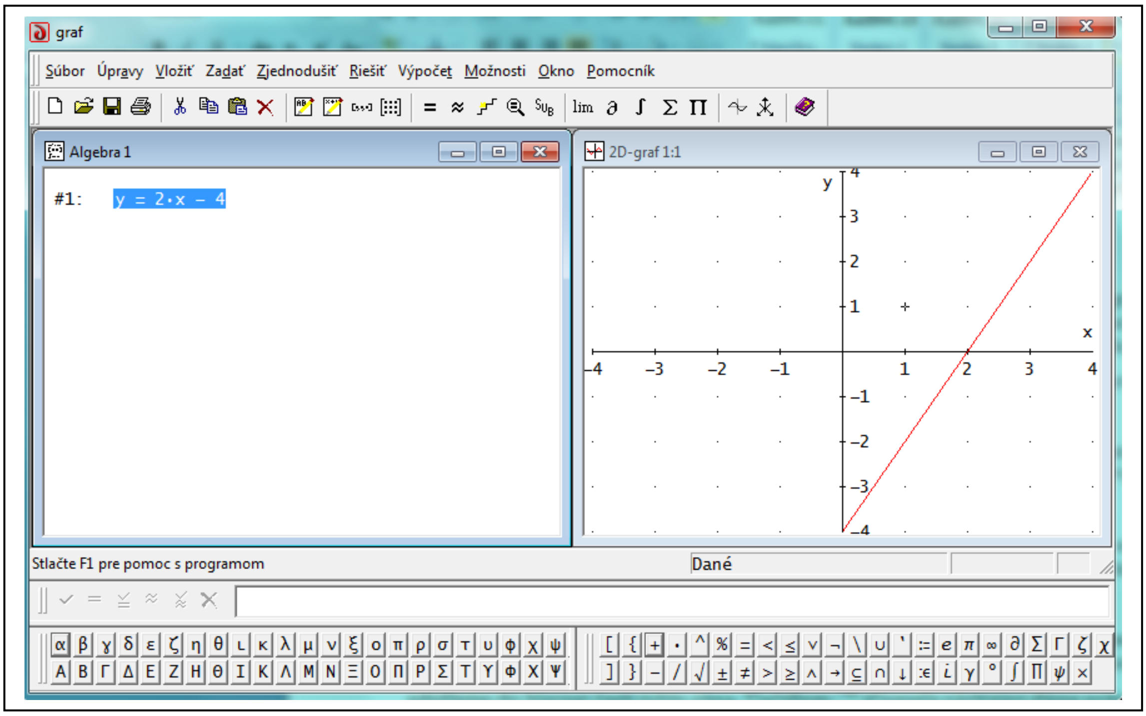
1.2 Graf funkcie

Ako som už spomenula v predošlom texte, pri práci s grafmi je výhodné mať v programe Derive 6 otvorené zároveň okno Algebra aj okno Grafika 2D. Predpisy funkcií sa zadávajú do príkazového riadku okna Algebra a samotné grafy sa kreslia v grafickom okne po stlačení tlačidla . Opakovaným stláčaním uvedeného tlačidla kreslí Derive 6 stále ten istý graf, pričom sa mení farba tohto grafu.

Pri napísaní viacerých predpisov funkcií do okna Algebra a následnom kreslení ich grafov je potrebné pripomenúť, že Derive 6 nakreslí ten graf, ktorého predpis je v okne Algebra práve aktívny, čiže vysvietený na modro.

Ak je grafické okno už plné, prípadne v ňom už nechceme kresliť ďalšie grafy, nie je potrebné ho zatvárať, ani otvárať nové. Grafickú tabuľu si „zmažeme“ pravým tlačidlom myšky pomocou príkazu „Zmazať všetky grafy“.

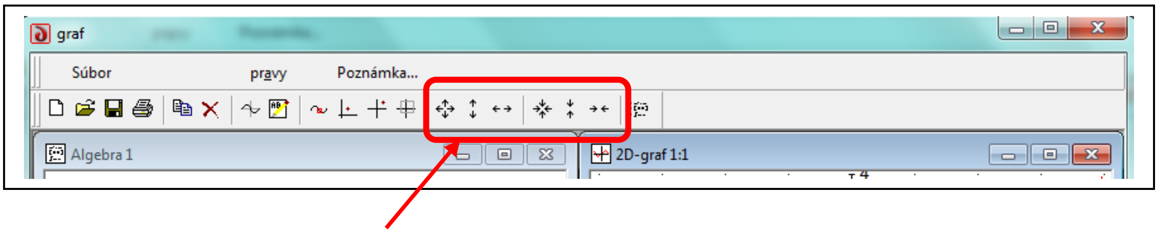
Kreslenie grafu teraz popíšem na konkrétnej ukážke úlohy **a)** z Príkladu 4 na strane 24. Do príkazového riadku okna Algebra napíšeme predpis (rovnicu) funkcie a enterom ho odošleme do hlavnej časti tohto okna. Tlačidlom z panela nástrojov dáme pokyn na otvorenie grafického okna. V okne Grafika 2D opäť stlačíme , čím sa nakreslí samotný graf funkcie. Je praktické mať otvorené obe okná vedľa seba, čo dosiahneme postupom popísaným na stranách 8 – 9.



Obrázok 13 Predpis a graf funkcie z úlohy **a)** Príkladu 4 v programe Derive 6

Prameň: vlastný návrh

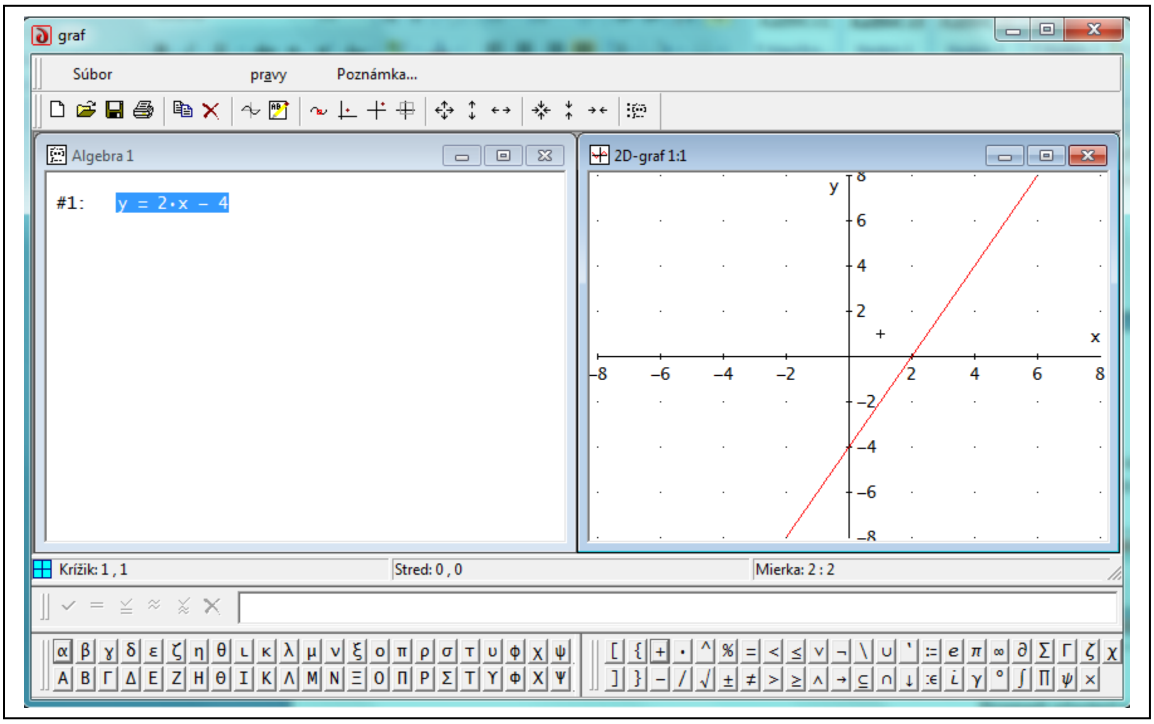
V prípade, že potrebujeme (napr. kvôli prehľadnosti a lepšej „čitateľnosti") zväčšiť alebo zmenšiť graf, je možné zmeniť jeho rozsah, a to pomocou tlačidiel na paneli nástrojov okna Grafika 2D.



Obrázok 14 Tlačidlá na zmenu rozsahu grafu v programe Derive 6

Prameň: vlastný návrh

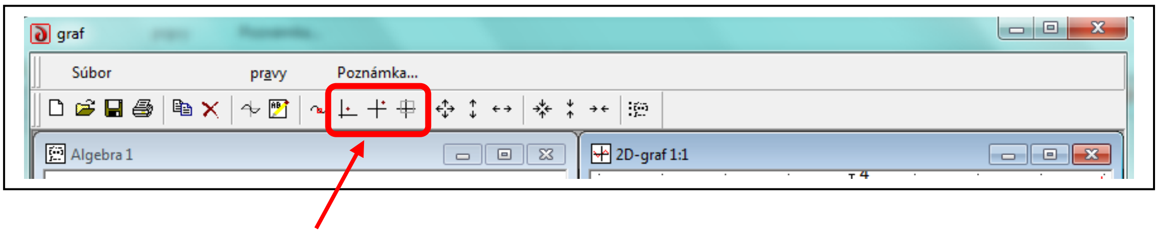
Hranice grafu sa dajú nastaviť aj manuálne, zadaním minimálnej a maximálnej vodorovnej aj zvislej hodnoty.



Obrázok 15 Predpis a graf funkcie z úlohy **a)** Príkladu 4 so zmeneným rozsahom grafu

Prameň: vlastný návrh

Rovnako je možné zmeniť aj centrovanie grafu. Priesečník súradnicových osí, čiže bod [0, 0], nemusí byť v strede grafického okna. Tieto zmeny možno realizovať opäť pomocou tlačidiel na paneli nástrojov okna Grafika 2D.



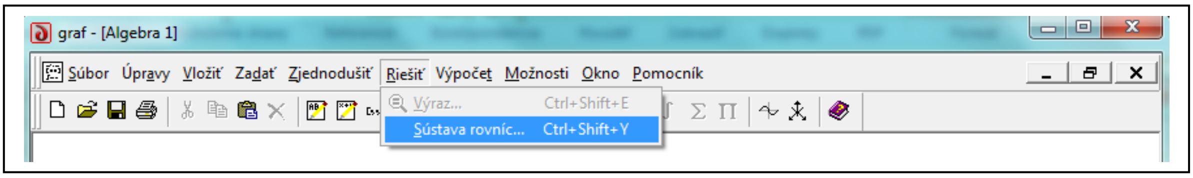
Obrázok 16 Tlačidlá na zmenu centrovania grafu v programe Derive 6

Prameň: vlastný návrh

1.3 Hľadanie predpisu funkcie

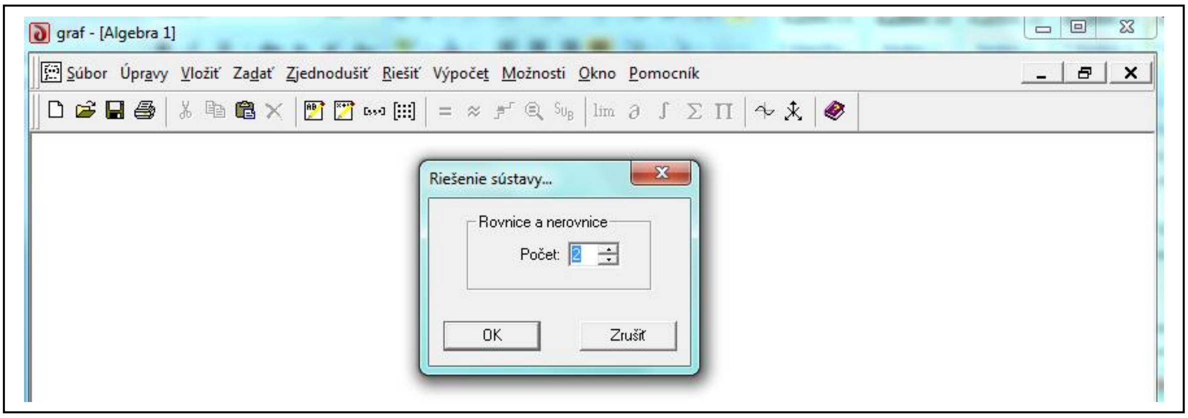
Pri hľadaní predpisu (rovnice) funkcie budeme pracovať len v okne Algebra programu Derive 6.
Pri riešení úloh je potrebné vždy zostaviť sústavu rovníc s príslušným počtom neznámych pre daný typ funkcie. Pri lineárnej funkcii, ktorá má všeobecný predpis tvaru $y = ax + b$, je to sústava dvoch lineárnych rovníc s dvoma neznámymi a, b. Pri kvadratickej funkcii – so všeobecným predpisom $y = ax^2 + bx + c$, to bude sústava troch lineárnych rovníc s troma neznámymi a, b, c, apod.
Podľa počtu neznámych, ktoré v predpise funkcie hľadáme, máme spravidla v úlohe daný rovnaký počet vlastností, ktoré má táto funkcia. Najčastejšie sú to súradnice bodov, ktorými prechádza jej graf alebo funkčné hodnoty, ktoré jej patria.

Riešenie sústavy rovníc v programe Derive 6 ukážem na konkrétnych príkladoch funkcií. Najprv stlačíme v ponuke Menu tlačidlo „Riešiť" a vyberieme možnosť „Sústava rovníc".



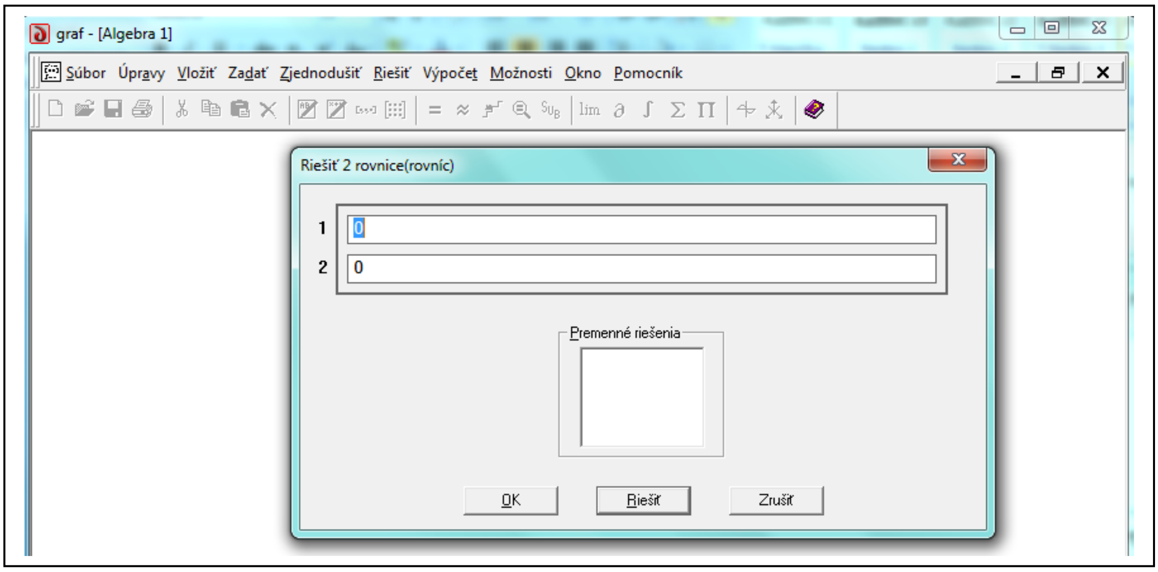
Obrázok 17 Príkaz na riešenie sústavy rovníc v programe Derive 6
Prameň: vlastný návrh

Program následne požaduje informáciu o počte rovníc sústavy.

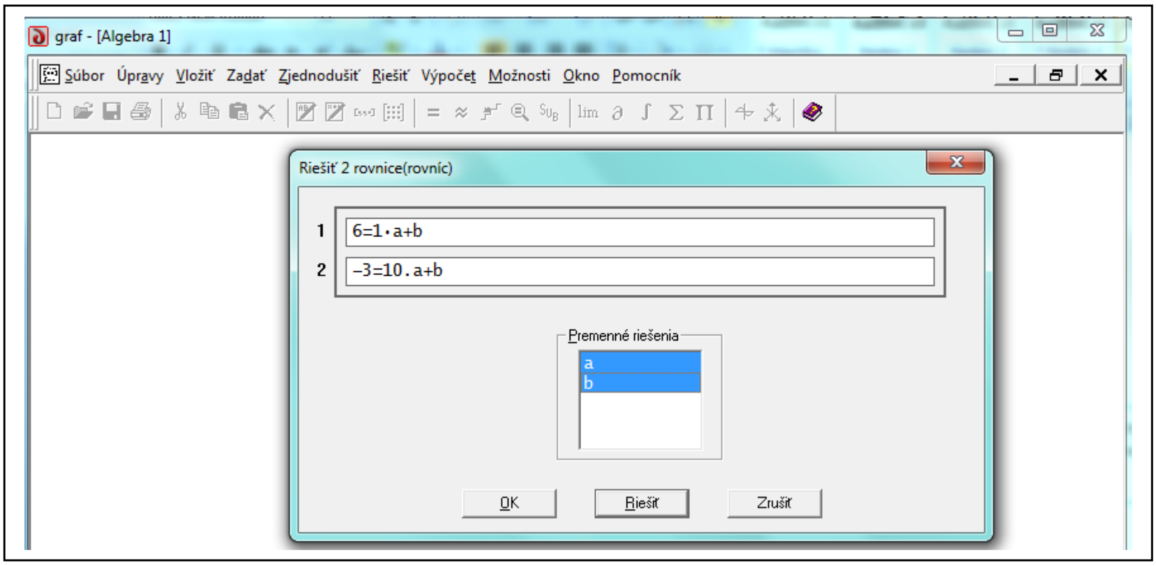


Obrázok 18 Požiadavka programu Derive 6 na zadanie počtu rovníc sústavy
Prameň: vlastný návrh

V úlohách nasledujúcej kapitoly to budú najprv sústavy dvoch rovníc, preto zadám počet rovníc „2". Po určení počtu rovníc sa v okne Algebra objaví tabuľka s dvoma riadkami, do ktorých priamo napíšeme jednotlivé rovnice sústavy (Obrázok 19).
Začnem úlohou **a)** z Príkladu 8 na strane 28. Do predpisu (rovnice) lineárnej funkcie $y = ax + b$ dosadíme za premenné x a y súradnice zadaných bodov. Do prvej rovnice uvedieme súradnice prvého bodu a do druhej rovnice sústavy súradnice druhého bodu (Obrázok 20).
Program Derive 6 si automaticky určí neznáme (premenné riešenia).

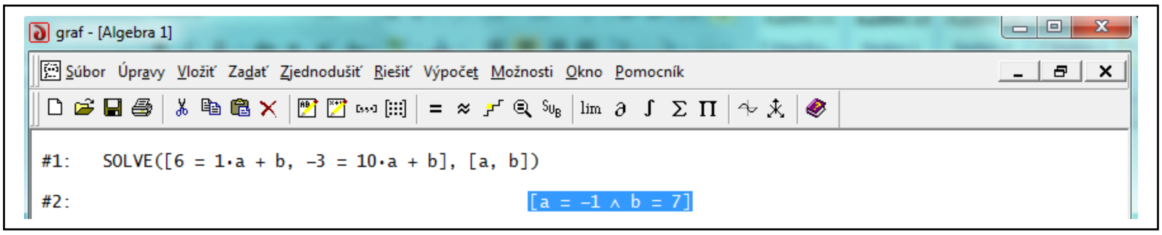


Obrázok 19 Ponuka programu Derive 6 na zadanie jednotlivých rovníc sústavy
Prameň: vlastný návrh



Obrázok 20 Zadanie jednotlivých rovníc sústavy z úlohy **a)** Príkladu 8
Prameň: vlastný návrh

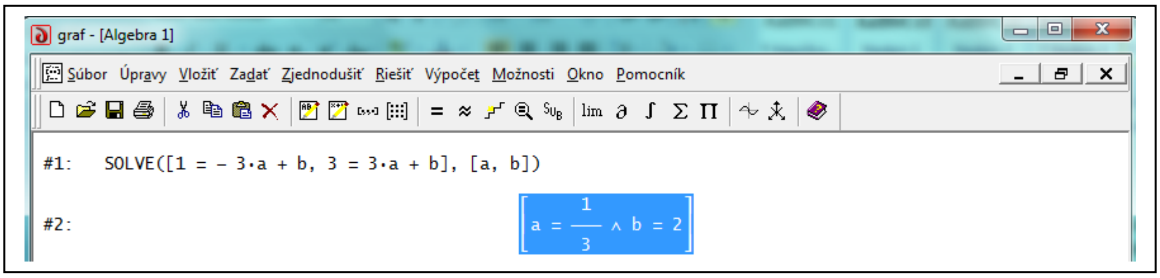
Tlačidlom „Riešiť" automaticky odošleme napísanú sústavu do okna Algebra, kde ju Derive 6 hneď vyrieši.



Obrázok 21 Riešenie sústavy rovníc z úlohy **a)** Príkladu 8
Prameň: vlastný návrh

Hľadaný predpis funkcie z úlohy **a)** Príkladu 8 je teda: $y = -x + 7$.

V úlohe **b)** z Príkladu 9 na strane 29 sú dané dve funkčné hodnoty funkcie, ktorej predpis hľadáme. V tomto prípade do rovnice lineárnej funkcie $y = ax + b$ dosadíme za premennú x číslo v zátvorke a za premennú y číslo na pravej strane danej rovnosti. Stačí si uvedomiť, že $f(x) = y$. Do prvej rovnice uvedieme čísla z prvej funkčnej hodnoty a do druhej rovnice čísla z druhej hodnoty funkcie (Obrázok 22).
Aj v prípade danej dvojice funkčných hodnôt je postup hľadania predpisu funkcie v programe Derive 6 rovnaký, ako keby boli dané súradnice dvoch bodov patriacich funkcii. (Príkaz na riešenie sústavy rovníc z ponuky Menu okna Algebra → voľba počtu rovníc sústavy → napísanie jednotlivých rovníc a ich odoslanie do okna Algebra tlačidlom „Riešiť“.)



Obrázok 22 Riešenie sústavy rovníc z úlohy **b)** Príkladu 9

Prameň: vlastný návrh

Hľadaný predpis funkcie z úlohy **b)** Príkladu 9 je teda: $y = \frac{1}{3}x + 2$.

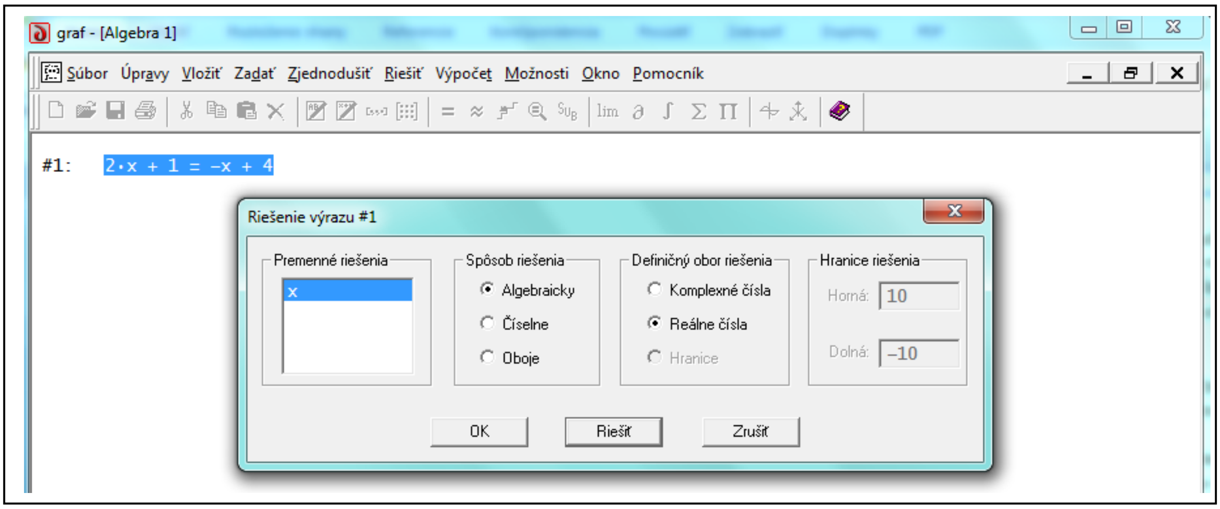
1.4 Grafické riešenie rovníc s jednou neznámou

Pri grafickom riešení rovníc pracujeme v programe Derive 6 súčasne s oknom Algebra, kde zadávame jednotlivé rovnice (príp. ich aj numericky riešime), a s oknom Grafika 2D, kde sa zobrazujú samotné grafické riešenia.

V prípade grafického riešenia lineárnej rovnice zostrojíme do tej istej súradnicovej sústavy grafy dvoch lineárnych funkcií, napr. $y = l(x)$ a $y = p(x)$, pričom $l(x)$ je výraz na ľavej strane danej lineárnej rovnice a $p(x)$ je výraz na pravej strane danej lineárnej rovnice. Pri zostrojovaní grafov v programe Derive 6 postupujeme rovnako, ako je to opísané pri práci s grafmi na stranách 13 – 14.

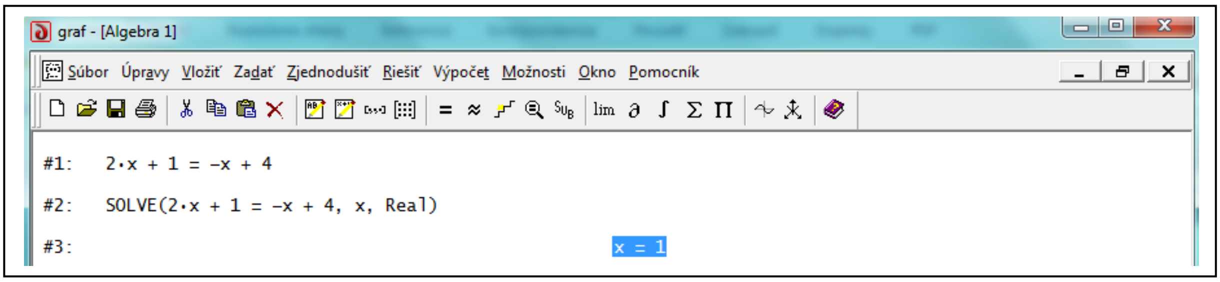
Lineárna rovnica môže mať jeden, žiaden alebo nekonečne veľa koreňov. O počte jej koreňov rozhodne vzájomná poloha priamok, ktoré sú grafickým znázornením funkcií $y = l(x)$ a $y = p(x)$.
V prípade, že lineárna rovnica má jeden koreň, je to x-ová súradnica priesečníka priamok $y = l(x)$ a $y = p(x)$. Jej číselnú hodnotu v programe Derive 6 môžeme zistiť aj využitím funkcie „krížik“, ako je to opísané na strane 8 a prezentované aj na Obrázku 2.

Ak chceme danú rovnicu riešiť numericky, stačí pracovať len v okne Algebra. Do príkazového riadku danú rovnicu napíšeme a odošleme ju enterom do hlavnej časti okna. Tlačidlom  z panela nástrojov dáme pokyn na jej riešenie. Program Derive 6 od nás následne požaduje informácie o premenných riešenia (Spravidla si neznáme určí aj sám.), spôsobe riešenia (Odporúčam voliť možnosť „Algebraicky“.) a definičnom obore rovnice. Ten je automaticky nastavený na komplexné čísla, preto je potrebné vybrať alternatívu „Reálne čísla“ (Obrázok 23).



Obrázok 23 Zadanie rovnice z úlohy **a)** Príkladu 12 a požiadavky programu Derive 6
Prameň: vlastný návrh

Po stlačení tlačidla „Riešiť" je rovnica odoslaná do hlavnej časti okna Algebra a automaticky vyriešená.



Obrázok 24 Numerické riešenie rovnice z úlohy **a)** Príkladu 12 v programe Derive 6
Prameň: vlastný návrh

1.5 Grafické riešenie nerovníc s jednou neznámou

Pri grafickom riešení nerovníc v programe Derive 6 pracujeme opäť súčasne s oknom Algebra aj s grafickým oknom. V okne Algebra sa zadávajú jednotlivé nerovnice (príp. sa aj numericky riešia) a v okne Grafika 2D sa zobrazujú samotné grafické riešenia.

V prípade grafického riešenia lineárnej nerovnice (podobne ako pri grafickom riešení rovnice) s jednou neznámou zostrojíme do tej istej súradnicovej sústavy grafy dvoch lineárnych funkcií, napr. $y = l(x)$ a $y = p(x)$, pričom $l(x)$ je výraz na ľavej strane danej lineárnej nerovnice a $p(x)$ je výraz na pravej strane danej lineárnej nerovnice.
Pri zostrojovaní grafov v programe Derive 6 postupujeme rovnako, ako je to opísané pri práci s grafmi na stranách 13 – 14.

Koreňmi nerovnice sú tie hodnoty premennej *x*, ktoré spĺňajú požadovanú nerovnosť a „čítame" ich z x-ovej osi. Množinou koreňov lineárnej nerovnice s jednou neznámou môže byť interval s jednou hranicou v nevlastnom bode alebo celá množina reálnych čísel alebo prázdna množina.

Pri numerickom riešení nerovníc v programe Derive 6 postupujeme rovnako, ako v prípade lineárnych rovníc, ktoré som opísala v predošlej podkapitole.

Na záver prvej kapitoly chcem zdôrazniť, že som v nej stručne opísala len tie časti práce s programovým systémom Derive 6, ktoré využijem v príkladoch v nasledujúcej kapitole. Podrobnejší opis práce s uvedeným programom možno nájsť v publikáciách vydaných Slovenskou technickou univerzitou v Bratislave [1, 2] a ďalšie možnosti jeho využitia aj v OPS Kontuľová, J. z roku 2012 [5].

2 LINEÁRNE FUNKCIE V PROGRAME DERIVE 6

V nasledujúcej kapitole opíšem rôzne spôsoby využitia programu Derive 6 pri práci s lineárnymi funkciami. Budem vychádzať zo zavedenia pojmu *lineárna funkcia*, pričom ukážem napríklad:

- spôsoby výpočtu súradníc bodov patriacich lineárnej funkcii,
- grafické znázornenie lineárnej funkcie,
- vplyv parametrov $a, b \in \boldsymbol{R}$ na graf lineárnej funkcie $y = ax + b$,
- hľadanie predpisu (rovnice) lineárnej funkcie.

Taktiež ukážem možnosti využitia poznatkov o lineárnych funkciách v problematike grafického riešenia:

- lineárnych rovníc,
- lineárnych nerovníc.

2.1 Súradnice bodov patriacich lineárnej funkcii

Najprv zavediem pojem *lineárna funkcia*. Je to každá funkcia daná predpisom (rovnicou) $y = ax + b$, pričom *a, b* sú ľubovoľné reálne čísla. Uvediem niekoľko príkladov, napr.:

$y = 2x + 1$	$y = 4x$
$y = 5x - 3$	$y = -6x$
$y = -x + 2$	$y = 5$
$y = -3x - 7$	$y = 0$
$y = -8x + \frac{1}{4}$	$y = -\frac{2}{3}$, atď.

O tom, či nejaký bod patrí alebo nepatrí danej lineárnej funkcii, sa presvedčíme dosadením jeho súradníc do jej predpisu (rovnice). Podobne pri hľadaní chýbajúcich súradníc bodov, o ktorých vieme, že patria lineárnej funkcii, vypočítame hodnotu výrazu, resp. vyriešime rovnicu, ktorú dostaneme dosadením príslušnej hodnoty známej súradnice.

<u>Príklad 1</u>

Doplňte chýbajúce súradnice bodov A – J tak, aby patrili danej funkcii:

a)	$a: y = x + 5$	A[x; 3]	**f)**	$f: y = 3 - x$	F[2; y]
b)	$b: y = 2x + 1$	B[−6; y]	**g)**	$g: y = 4 - 3x$	G[x; 10]
c)	$c: y = \frac{x+1}{3}$	C[−3; y]	**h)**	$h: y = \frac{2-x}{2}$	H[−5; y]
d)	$d: y = \frac{2}{3}x - 4$	D[x; −12]	**i)**	$i: y = \frac{5}{6} - 2x$	I[x; 0]
e)	$e: y = -\frac{3}{4}x$	E[−2; y]	**j)**	$j: y = \frac{2x}{5} - 3$	J[x; 6]

Riešenie

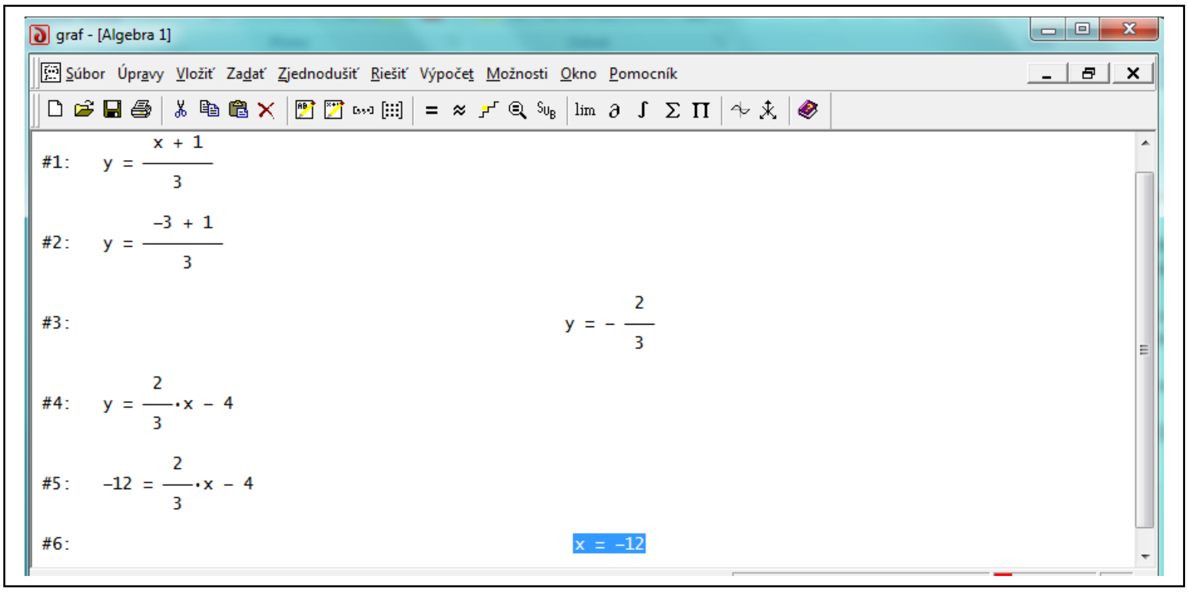
V programe Derive 6 napíšeme postupne predpis každej funkcie a nájdeme chýbajúce súradnice. (Podrobný postup je uvedený na stranách 10 až 13.)

Pri zadávaní predpisov funkcií, ktoré majú tvar zlomkov, je potrebné zátvorkami „ohraničiť“ čitateľ. (Napr. v úlohe **c)** sa predpis musí zadať do príkazového riadku v tvare $y = (x + 1) / 3$.)

V prípade, že predpisy funkcií obsahujú zlomok, ktorého čitateľ je jednočlen, nie je potrebné použiť pri zadávaní predpisu zátvorky. (Napr. v úlohe **d)** stačí predpis zadať do príkazového riadku v tvare $y = 2/3x - 4$.)

Pri hľadaní súradnice x nahradíme premennú y v predpise (rovnici) funkcie zadanou hodnotou súradnice y a program následne vypočíta hodnotu súradnice x.

Pri hľadaní súradnice y analogicky substituujeme premennú x v predpise (rovnici) funkcie danou hodnotou súradnice x a program následne vypočíta hodnotu súradnice y.



Obrázok 25 Výpočet chýbajúcich súradníc v úlohách **c)** a **d)** Príkladu 1

Prameň: vlastný návrh

Výsledky Príkladu 1

a) $x = -2$	**c)** $y = -\dfrac{2}{3}$	**e)** $y = 1{,}5$	**g)** $x = -2$	**i)** $x = \dfrac{5}{12}$
b) $y = -11$	**d)** $x = -12$	**f)** $y = 1$	**h)** $y = 3{,}5$	**j)** $x = 22{,}5.$

<u>Príklad 2</u>

Zistite, či dané body A, B patria danej funkcii f:

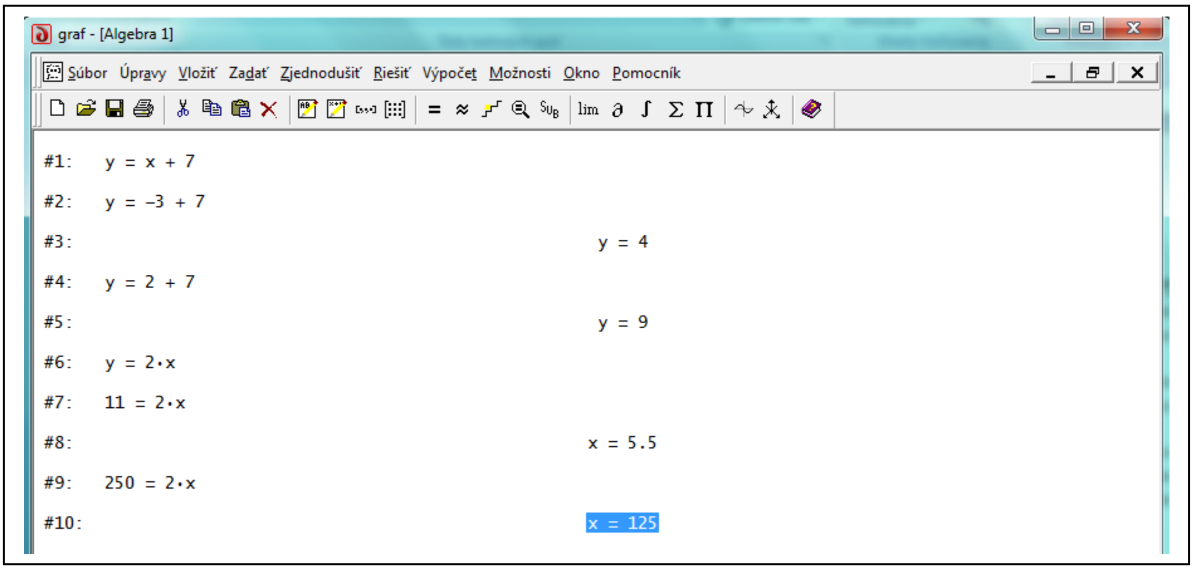
a) $f\colon y = x + 7$	A[−3; −4], B[2; 9]	**d)** $f\colon y = 2x - 4$	A[−1; 5], B[−6; 2]
b) $f\colon y = 2x$	A[−13; 11], B[125; 250]	**e)** $f\colon y = 3x - 5$	A[12; 28], B[−25; −80]
c) $f\colon y = \dfrac{1}{2}x - 3$	A[−10; −8], B[0; 3]	**f)** $f\colon y = \dfrac{2-x}{4}$	A[122; −30], B[14; 4]

Riešenie

V programe Derive 6 napíšeme postupne predpis každej funkcie.
Pri riešení máme dve možnosti, ako zistiť, či daný bod patrí alebo nepatrí danej funkcii:

1. V predpise (rovnici) funkcie nahradíme premennú x hodnotou x-ovej súradnice daného bodu a program vypočíta hodnotu premennej y, ktorú následne porovnáme s danou hodnotou súradnice y tohto bodu.
2. V predpise (rovnici) funkcie nahradíme premennú y danou hodnotou y-ovej súradnice bodu a program vypočíta hodnotu premennej x, ktorú následne porovnáme s danou hodnotou súradnice x tohto bodu.

V prípade, že hodnota súradnice, ktorú vypočíta program Derive 6, sa zhoduje so zadanou súradnicou príslušného bodu, tak daný bod patrí danej funkcii. V prípade, že hodnota súradnice vypočítanej programom Derive 6, sa líši od zadanej súradnice príslušného bodu, tak daný bod nepatrí danej funkcii.



Obrázok 26 Overovanie súradníc bodov A a B v úlohách **a)** a **b)** Príkladu 2
Prameň: vlastný návrh

Výsledky Príkladu 2

a) A nie, B áno
b) A nie, B áno
c) A áno, B nie
d) A nie, B nie
e) A nie, B áno
f) A áno, B nie

Príklad 3

Vypočítajte súradnice priesečníkov danej funkcie f so súradnicovými osami:

a) f: $y = 3x - 6$

b) f: $y = x + 3$

c) f: $y = 1 - \frac{x}{2}$

d) f: $y = \frac{5 - 2x}{2}$

e) f: $y = \frac{3 - x}{4}$

f) f: $y = 8 - 2x$

g) f: $y = 7 - x$

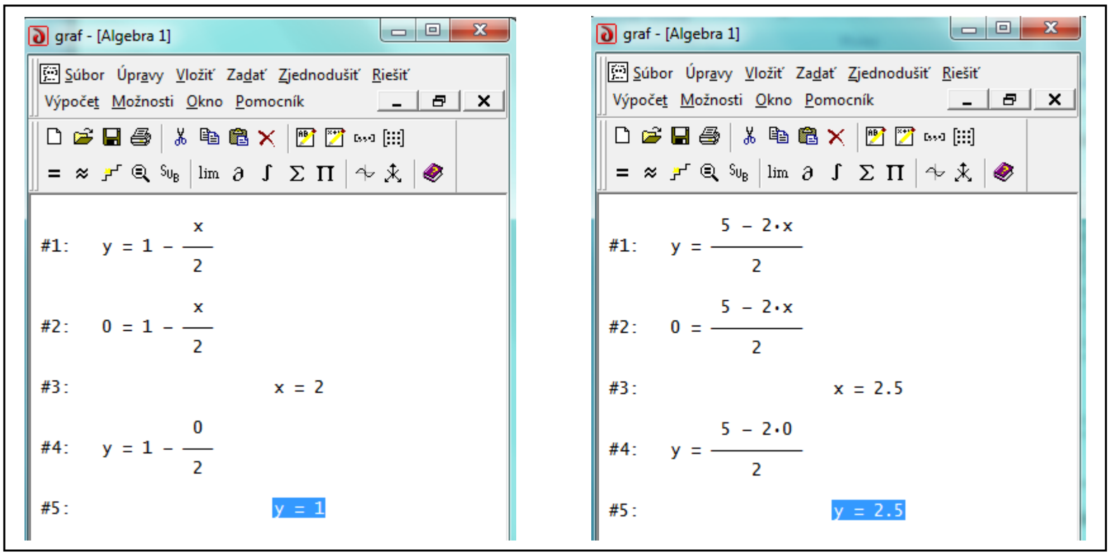
h) f: $y = \frac{x + 5}{3}$

i) f: $y = \frac{2}{3}x - \frac{1}{3}$

j) f: $y = 5x + \frac{5}{2}$

Riešenie

Ak poznáme predpis (rovnicu) funkcie, tak si stačí uvedomiť, že priesečník s osou *x* (P_x) má súradnice tvaru [*x*; 0] a priesečník s osou *y* (P_y) má súradnice tvaru [0; *y*].
V programe Derive 6 napíšeme postupne predpis každej funkcie.
Podobne ako v predošlých príkladoch budeme pri hľadaní súradnice *x* priesečníka s osou *x* nahrádzať premennú *y* v predpise (rovnici) funkcie nulou. Program následne vypočíta hodnotu hľadanej súradnice *x*.
Pri hľadaní súradnice *y* priesečníka s osou *y* budeme premennú *x* v predpise (rovnici) funkcie taktiež substituovať hodnotou nula. Program následne vypočíta hodnotu súradnice *y*.
(Poznámka: Žiaci si veľmi rýchlo uvedomia, že hodnota *y*-ovej súradnice priesečníka s osou *y* je vždy reálne číslo „b“ z predpisu (rovnice) lineárnej funkcie *y* = a*x* + b.)



Obrázok 27 Výpočet súradníc priesečníkov P_x a P_y v úlohách **c)** a **d)** Príkladu 3

Prameň: vlastný návrh

Výsledky Príkladu 3

a) P_x [2; 0] a P_y [0; −6]

b) P_x [−3; 0] a P_y [0; 3]

c) P_x [2; 0] a P_y [0; 1]

d) P_x [2,5; 0] a P_y [0; 2,5]

e) P_x [3; 0] a P_y [0; 3]

f) P_x [4; 0] a P_y [0; 8]

g) P_x [7; 0] a P_y [0; 7]

h) P_x [−5; 0] a P_y [0; $\frac{5}{3}$]

i) P_x [0,5; 0] a P_y [0; $-\frac{1}{3}$]

j) P_x [−0,5; 0] a P_y [0; 2,5]

2.2 Graf lineárnej funkcie

Ešte zo základnej školy žiaci vedia, že grafom lineárnej funkcie (ktorej definičným oborom je množina reálnych čísel) je priamka.
Ďalej uvediem dva typy úloh na zostrojenie grafu funkcie, pri ktorých využívam program Derive 6.

Príklad 4

Zostrojte graf danej funkcie f:

a) $f\colon y = 2x - 4$

b) $f\colon y = 3 - x$

c) $f\colon y = 2 - 3x$

d) $f\colon y = \dfrac{x+4}{2}$

e) $f\colon y = -\dfrac{2}{3}$

f) $f\colon y = -2x - 4$

g) $f\colon y = -2$

h) $f\colon y = 2x$

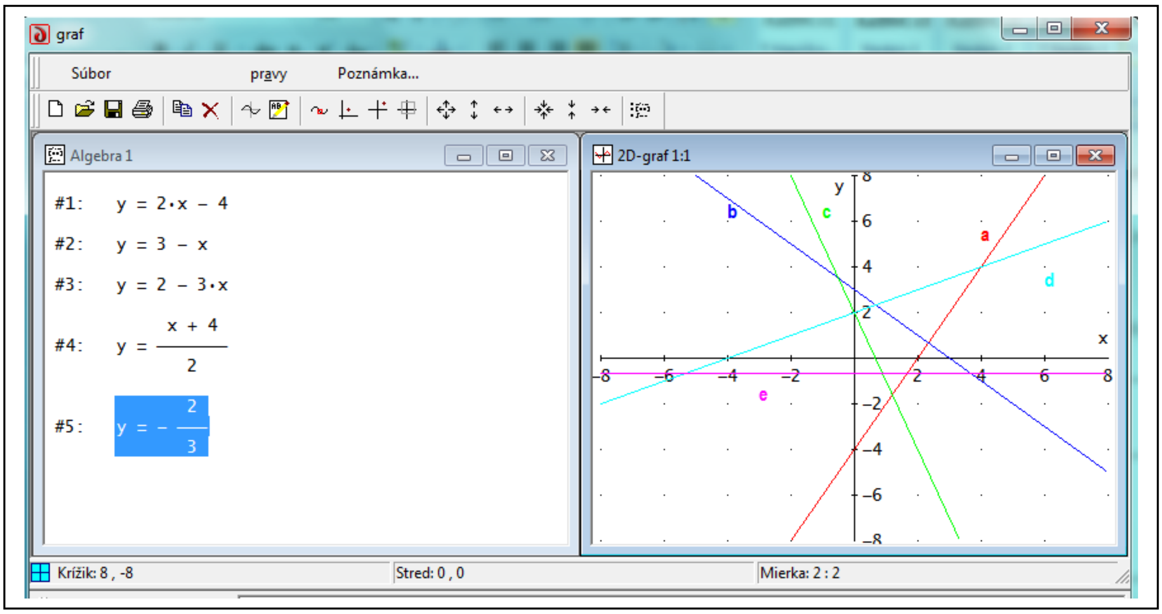
i) $f\colon y = -\dfrac{x}{2}$

j) $f\colon y = \dfrac{2}{3}x + \dfrac{1}{3}$

Pri grafe každej funkcie si všimnite jej vlastnosti (hlavne monotónnosť a párnosť, resp. nepárnosť) a pokúste sa zovšeobecniť pozorovanú súvislosť.

Riešenie

V programe Derive 6 napíšeme postupne predpis každej funkcie a zostrojíme jej graf. Vlastnosti jednotlivých funkcií určujú žiaci na základe priebehu ich grafov.



Obrázok 28 Predpisy a grafy funkcií z úloh **a)** až **e)** Príkladu 4

Prameň: vlastný návrh

Výsledky Príkladu 4

a) rastúca; ani párna, ani nepárna

b) klesajúca; ani párna, ani nepárna

c) klesajúca; ani párna, ani nepárna

d) rastúca; ani párna, ani nepárna

e) konštantná; párna

f) klesajúca; ani párna, ani nepárna

g) konštantná; párna

h) rastúca; nepárna

i) klesajúca; nepárna

j) rastúca; ani párna, ani nepárna.

Zovšeobecnenie:

Pozorované vlastnosti lineárnej funkcie f závisia od hodnôt reálnych koeficientov „a“ a „b“ v jej predpise (rovnici): $y = ax + b$.

Monotónnosť lineárnej funkcie *f*: y = ax + b súvisí so znamienkom koeficientu „a“:

- V prípade, že $a > 0$, tak funkcia *f* je *rastúca*.
- V prípade, že $a = 0$, tak funkcia *f* je *konštantná*.
- V prípade, že $a < 0$, tak funkcia *f* je *klesajúca*.

Párnosť, resp. nepárnosť lineárnej funkcie *f*: y = ax + b súvisí s nulovou hodnotou jedného alebo druhého koeficientu:

- V prípade, že $a = 0$, tak funkcia *f* je *párna*.
  Párna lineárna funkcia má vlastne predpis tvaru *f*: y = b, pričom b$\in R$.
- V prípade, že $b = 0$, tak funkcia *f* je *nepárna*.
  Nepárna lineárna funkcia má vlastne predpis tvaru *f*: y = ax, pričom a$\in R$.

Poznámka
Lineárna funkcia *f*: $y = 0$ je príkladom funkcie, ktorá je zároveň párna aj nepárna.

Príklad 5

Do jedného obrázka zostrojte grafy daných funkcií:

a) $a: y = x$

$b: y = 3x$

$c: y = 5x$

$d: y = \frac{1}{2}x$

$e: y = \frac{1}{4}x$

b) $a: y = -x$

$b: y = -2x$

$c: y = -4x$

$d: y = -\frac{1}{3}x$

$e: y = -\frac{1}{5}x$

c) $a: y = -3$

$b: y = 1$

$c: y = 0$

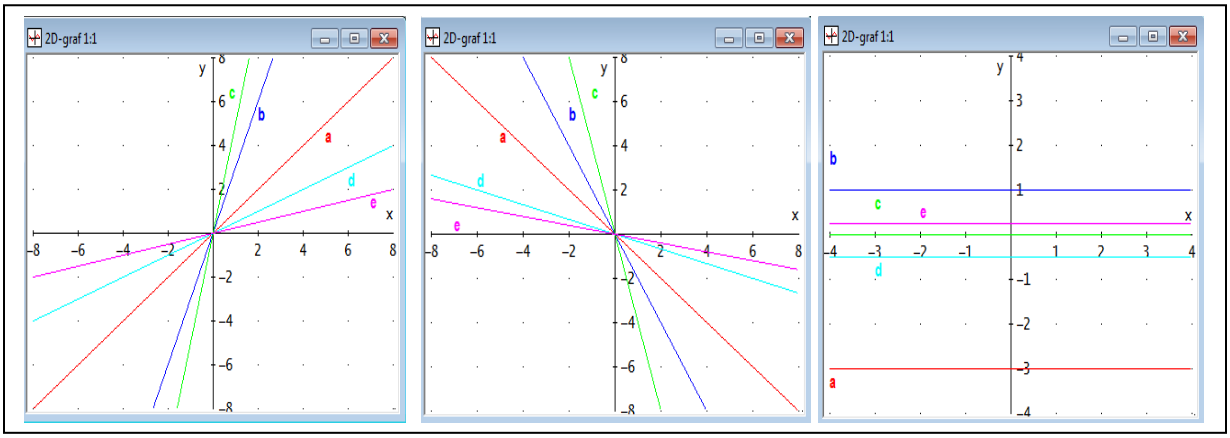
$d: y = -\frac{1}{2}$

$e: y = \frac{1}{4}$

Posúďte vplyv parametra „a“ na tvar grafu lineárnej funkcie danej rovnicou y = ax + b.

Riešenie

V programe Derive 6 napíšeme postupne predpis každej funkcie a zostrojíme jej graf.



Obrázok 29 Grafy funkcií z úloh **a)** až **c)** Príkladu 5

Prameň: vlastný návrh

Všimneme si, ako parameter „a“ ovplyvňuje priebeh grafu lineárnej funkcie danej predpisom (rovnicou) y = ax + b:

- znamienko parametra „a“ **ovplyvňuje monotónnosť** lineárnej funkcie;
  a > 0 ⇒ funkcia je rastúca (*výsledky úlohy **a)***)
  a < 0 ⇒ funkcia je klesajúca (*výsledky úlohy **b)***)
  a = 0 ⇒ funkcia je konštantná (*výsledky úlohy **c)***)
- hodnota parametra „a“ **ovplyvňuje strmosť grafu** lineárnej funkcie;
  čím väčšia je hodnota |a|, tým graf prudšie „stúpa“, príp. klesá
  čím menšia je hodnota |a|, tým graf menej „stúpa“, príp. klesá.

(Poznámka: Vo vyšších ročníkoch sa žiaci dozvedia, že hodnota parametra „a“ je hodnotou tangensu uhla, ktorý zviera priamka, ktorá je grafom lineárnej funkcie, s kladnou časťou osi *x* a nazýva sa *smernica*.)

Príklad 6

Do jedného obrázka zostrojte grafy daných funkcií:

a) $a: y = x$; $b: y = x + 2$; $c: y = x + 4$; $d: y = x - 1$; $e: y = x - 3$

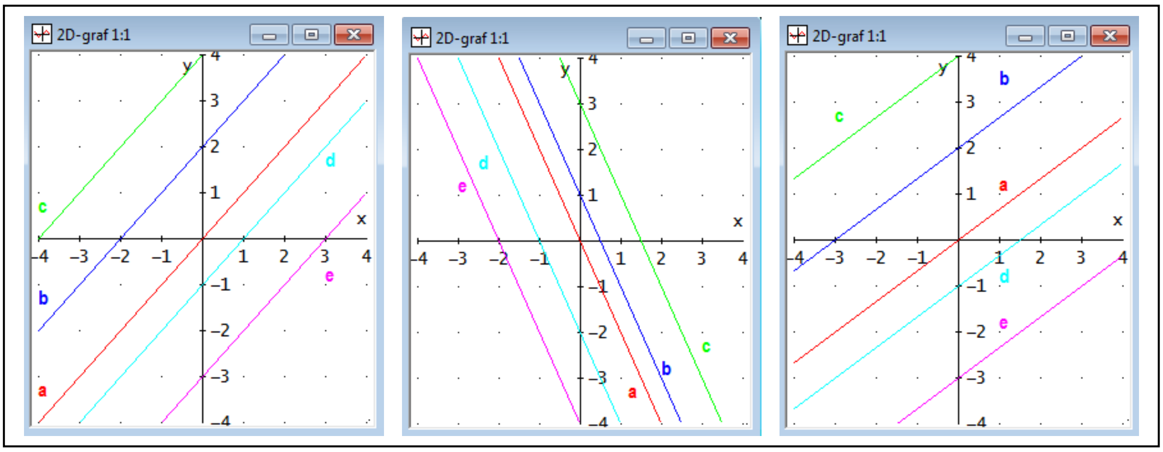
b) $a: y = -2x$; $b: y = -2x + 1$; $c: y = -2x + 3$; $d: y = -2x - 2$; $e: y = -2x - 4$

c) $a: y = \frac{2}{3}x$; $b: y = \frac{2}{3}x + 2$; $c: y = \frac{2}{3}x + 4$; $d: y = \frac{2}{3}x - 1$; $e: y = \frac{2}{3}x - 3$

Posúďte vplyv parametra „a“ na tvar grafu lineárnej funkcie danej rovnicou $y = ax + b$.

Riešenie

V programe Derive 6 napíšeme postupne predpis každej funkcie a zostrojíme jej graf. Všimneme si, že grafy lineárnych funkcií (dané predpisom tvaru $y = ax + b$) s rovnakou hodnotou parametra „a“ sú **navzájom rovnobežné**.



Obrázok 30 Grafy funkcií z úloh **a)** až **c)** Príkladu 6

Prameň: vlastný návrh

Príklad 7

Do jedného obrázka zostrojte grafy daných funkcií:

a) $a\colon y = x + 1$

$b\colon y = 2x + 1$

$c\colon y = -x + 1$

$d\colon y = -3x + 1$

$e\colon y = \frac{2}{5}x + 1$

b) $a\colon y = -x - 3$

$b\colon y = -2x - 3$

$c\colon y = x - 3$

$d\colon y = 3x - 3$

$e\colon y = \frac{5}{2}x - 3$

c) $a\colon y = x + \frac{4}{5}$

$b\colon y = 3x + \frac{4}{5}$

$c\colon y = -x + \frac{4}{5}$

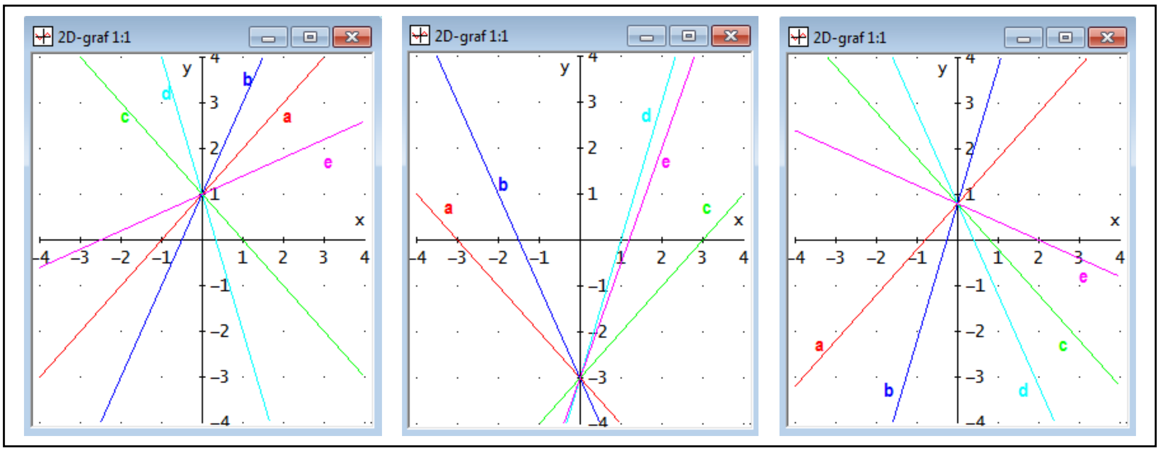
$d\colon y = -2x + \frac{4}{5}$

$e\colon y = -\frac{2}{5}x + \frac{4}{5}$

Posúďte vplyv parametra „b“ na priebeh grafu lineárnej funkcie danej predpisom (rovnicou) $y = ax + b$.

Riešenie

V programe Derive 6 napíšeme postupne predpis každej funkcie a zostrojíme jej graf. Všimneme si, že grafy lineárnych funkcií (dané predpisom tvaru $y = ax + b$) s rovnakou hodnotou parametra „b“ **sa pretínajú v jednom bode**. Všetky prechádzajú tým istým bodom na osi y, teda **majú rovnaký priesečník s osou** y. Je to bod so súradnicami $[0; b]$.



Obrázok 31 Grafy funkcií z úloh **a)** až **c)** Príkladu 7

Prameň: vlastný návrh

V tejto časti zvyknem následne s využitím vedomostí žiakov o grafoch lineárnych funkcií riešiť aj úlohy na

- „ručné“ zostrojovanie grafov lineárnych funkcií na základe vypočítania ich priesečníkov so súradnicovými osami, príp. na základe využitia ich párnosti, resp. nepárnosti,
- „ručné“ zostrojovanie grafov lineárnych funkcií, ktorých definičným oborom je časť množiny reálnych čísel, a teda ich grafom je časť priamky,

a rovnako úlohy na vlastnosti funkcií bez zostrojenia grafu lineárnej funkcie, napríklad:

- hľadanie oboru hodnôt lineárnej funkcie, ktorej definičným oborom je časť množiny reálnych čísel,
- zisťovanie monotónnosti lineárnej funkcie,
- zisťovanie párnosti, resp. nepárnosti lineárnej funkcie,
- zisťovanie ohraničenosti lineárnej funkcie, ktorej definičným oborom je časť množiny reálnych čísel,
- určovanie extrémov lineárnej funkcie, ktorej definičným oborom je časť množiny reálnych čísel.

Keďže v spomínaných typoch úloh nevyužívam program Derive 6, neuvádzam ich v tejto práci.

2.3 Hľadanie predpisu lineárnej funkcie

Na záver tematického celku o lineárnych funkciách hľadáme predpis (rovnicu) lineárnej funkcie, pričom poznáme niektoré jej vlastnosti. Vlastnosti, ktoré bývajú o funkcii dané, sú najčastejšie niektoré z nasledujúcich:

- súradnice dvoch bodov, ktorými prechádza jej graf,
- dve funkčné hodnoty, ktoré jej patria,
- jej graf, z ktorého sa dajú presne „vyčítať" súradnice dvoch bodov, ktorými prechádza, napr. jej priesečníky so súradnicovými osami,
- rovnobežnosť grafu hľadanej lineárnej funkcie s inou danou lineárnou funkciou a jeden bod, alebo funkčná hodnota, ktorá jej patrí.

Vo všetkých prípadoch znamená hľadanie predpisu lineárnej funkcie to isté, a síce riešenie sústavy dvoch lineárnych rovníc s dvoma neznámymi, príp. riešenie lineárnej rovnice s jednou neznámou. Pozrime sa na to bližšie v nasledujúcich príkladoch.

<u>Príklad 8</u>

Určte predpis (rovnicu) lineárnej funkcie, ktorej graf prechádza danými bodmi:

a) A[1; 6], B[10; −3]
b) A[4; 1], B[7; 4]
c) A[−3; 6], B[4; −8]
d) A[1; 3], B[−3; 1].

Riešenie

V programe Derive 6 zadáme postupne príkazy na riešenie sústav dvoch lineárnych rovníc s dvoma neznámymi a, *b*.
Uvedené sústavy rovníc dostaneme tak, že do predpisu (rovnice) lineárnej funkcie tvaru $y = ax + \mathrm{b}$ dosadíme za premenné x a y súradnice zadaných bodov. Do prvej rovnice uvedieme súradnice prvého bodu a do druhej rovnice sústavy súradnice druhého bodu.
V programe Derive 6 sú jednotlivé sústavy zapísané a ich korene vypočítané na Obrázku 32.

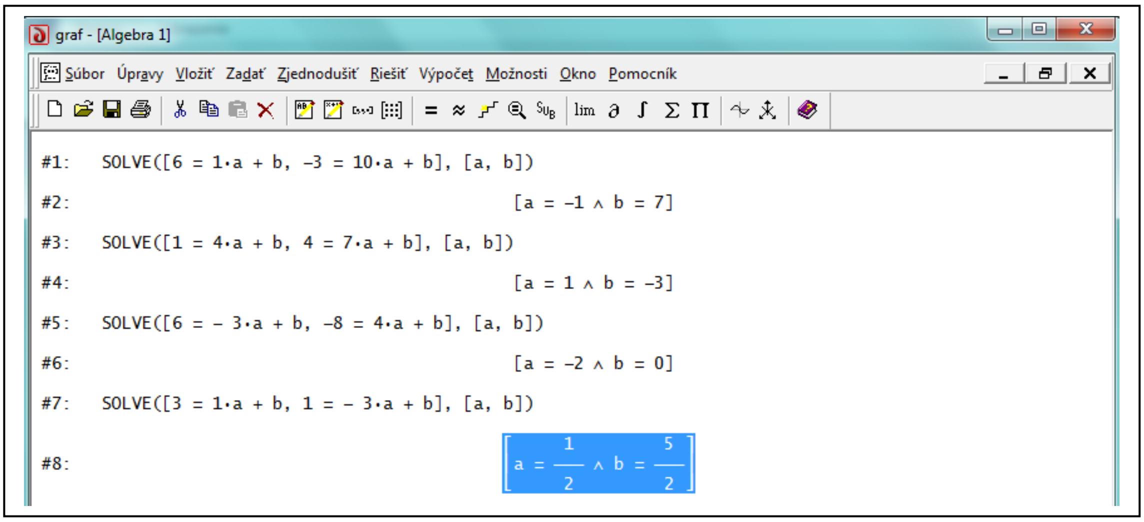
Výsledky Príkladu 8

Predpis (rovnica) lineárnej funkcie z úlohy **a)** je $y = -x + 7$.

Predpis (rovnica) lineárnej funkcie z úlohy **b)** je $y = x - 3$.

Predpis (rovnica) lineárnej funkcie z úlohy **c)** je $y = -2x$.

Predpis (rovnica) lineárnej funkcie z úlohy **d)** je $y = \frac{1}{2}x + \frac{5}{2}$.



Obrázok 32 Jednotlivé sústavy a ich korene z úloh **a)** až **d)** Príkladu 8

Prameň: vlastný návrh

<u>Príklad 9</u>

Určte predpis (rovnicu) lineárnej funkcie f, pre ktorú platí:

a) $f(4) = -3, f(3) = -4$

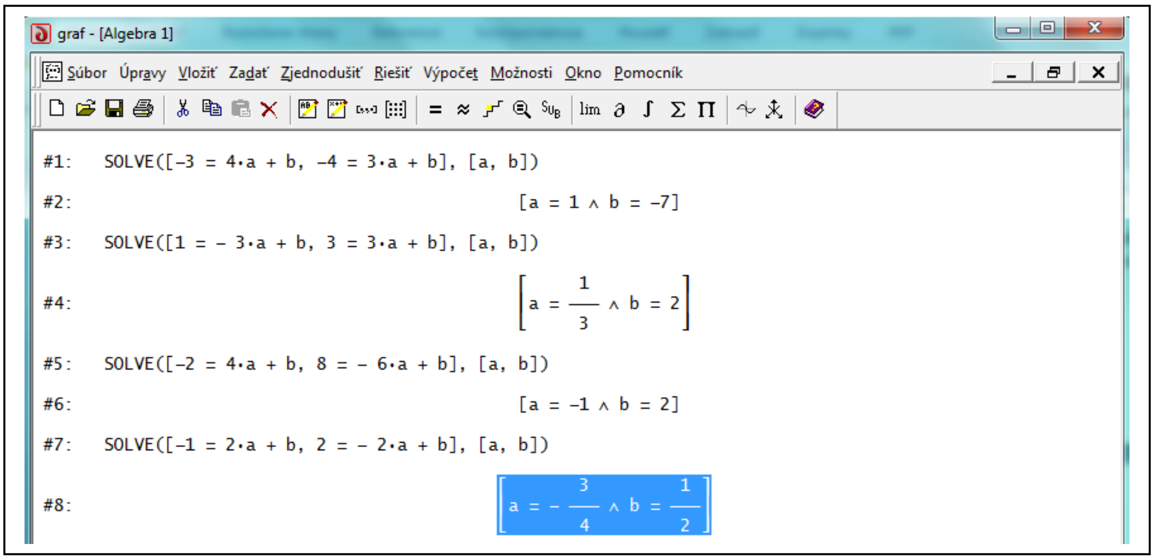
b) $f(-3) = 1, f(3) = 3$

c) $f(4) = -2, f(-6) = 8$

d) $f(2) = -1, f(-2) = 2$.

Riešenie

V programe Derive 6 zadáme postupne príkazy na riešenie sústav dvoch lineárnych rovníc s dvoma neznámymi a, *b*.
Uvedené sústavy rovníc dostaneme tak, že do predpisu (rovnice) lineárnej funkcie tvaru y = ax + b dosadíme za premenné x a y správne čísla funkčných hodnôt. Platí, že f(x) = y. Do prvej rovnice uvedieme čísla z prvej funkčnej hodnoty a do druhej rovnice sústavy čísla z druhej funkčnej hodnoty.



Obrázok 33 Jednotlivé sústavy a ich korene z úloh **a)** až **d)** Príkladu 9

Prameň: vlastný návrh

Výsledky Príkladu 9

Predpis (rovnica) lineárnej funkcie z úlohy **a)** je f: $y = x - 7$.

Predpis (rovnica) lineárnej funkcie z úlohy **b)** je f: $y = \frac{1}{3}x + 2$.

Predpis (rovnica) lineárnej funkcie z úlohy **c)** je f: $y = -x + 2$.

Predpis (rovnica) lineárnej funkcie z úlohy **d)** je f: $y = -\frac{3}{4}x + \frac{1}{2}$.

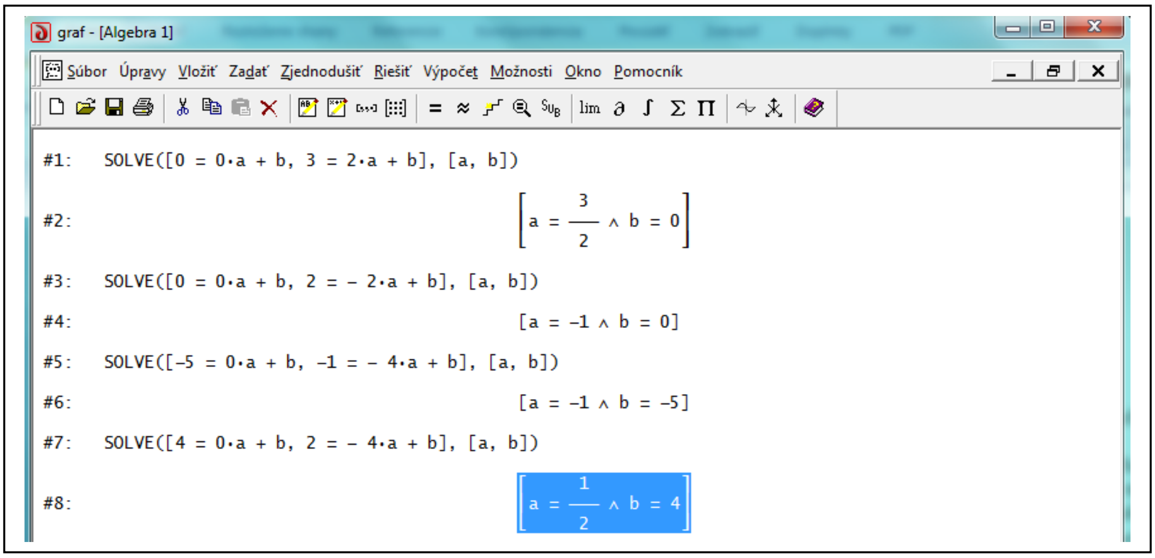
<u>Príklad 10</u>

Určte predpis (rovnicu) lineárnej funkcie f, pre ktorú platí:

a) jej graf prechádza počiatkom súradnicovej sústavy a bodom A[2; 3]
b) jej graf prechádza počiatkom súradnicovej sústavy a $f(-2) = 2$
c) jej graf pretína os y v čísle −5 a prechádza tiež bodom C[−4; −1]
d) jej graf pretína os y v čísle 4 a $f(-4) = 2$.

Riešenie

V programe Derive 6 zadáme postupne príkazy na riešenie sústav dvoch lineárnych rovníc s neznámymi *a, b*.
Uvedené rovnice dostaneme tak, že do predpisu (rovnice) lineárnej funkcie tvaru $y = ax + b$ dosadíme za premenné x a y súradnice daných bodov alebo správne čísla funkčných hodnôt. Platí, že súradnice bodov sú v tvare A[x; y] (podobne C[x; y]); počiatok súradnicovej sústavy je bod [0; 0]; priesečník s osou y [0; y] a premenné vo funkčných hodnotách sú v poradí f(x) = y.



Obrázok 34 Jednotlivé sústavy rovníc a ich korene z úloh **a)** až **d)** Príkladu 10

Prameň: vlastný návrh

Výsledky Príkladu 10

Predpis (rovnica) lineárnej funkcie z úlohy **a)** je f: $y = \frac{3}{2}x$.

Predpis (rovnica) lineárnej funkcie z úlohy **b)** je f: $y = -x$.

Predpis (rovnica) lineárnej funkcie z úlohy **c)** je f: $y = -x - 5$.

Predpis (rovnica) lineárnej funkcie z úlohy **d)** je f: $y = \frac{1}{2}x + 4$.

Príklad 11

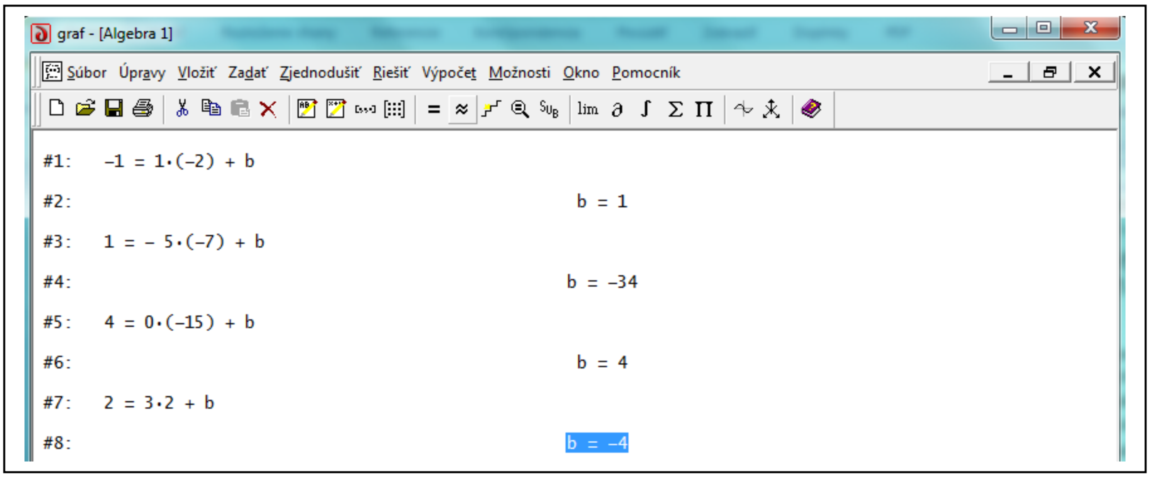
Určte predpis (rovnicu) lineárnej funkcie *f*, ktorej graf je rovnobežný s grafom danej funkcie *g* a ktorý prechádza daným bodom:

a) $g: y = x - 3$, A[−2; −1] **c)** $g: y = -7$, C[−15; 4]
b) $g: y = 4 - 5x$, B[−7; 1] **d)** $g: y = 3x + 1$, D[2; 2].

Riešenie

V programe Derive 6 zadáme postupne príkazy na riešenie lineárnej rovnice s neznámou *b*. Dá sa to urobiť dvoma spôsobmi: buď dáme príkaz na riešenie sústavy rovníc, pričom v počte rovníc udáme jednu rovnicu (podobne, ako v predošlých Príkladoch 8, 9, 10), alebo rovnicu napíšeme do príkazového riadku, odošleme enterom do hlavnej časti okna Algebra a stlačíme tlačidlo ≈. V oboch prípadoch program následne rovnicu sám vyrieši.
Potrebné rovnice dostaneme tak, že do predpisu (rovnice) lineárnej funkcie tvaru $y = ax + b$ dosadíme:

1. za parameter „a" rovnaké číslo, ako má v svojom predpise daná funkcia *g*,
2. za premenné *x* a *y* súradnice daných bodov. Treba si uvedomiť, že súradnice bodov sú v tvare A[*x*; *y*] (podobne B[*x*; *y*], C[*x*; *y*] a D[*x*; *y*]).



Obrázok 35 Jednotlivé rovnice a ich korene z úloh **a)** až **d)** Príkladu 11
Prameň: vlastný návrh

Výsledky Príkladu 11

Predpis (rovnica) lineárnej funkcie z úlohy **a)** je $f: y = x + 1$.
Predpis (rovnica) lineárnej funkcie z úlohy **b)** je $f: y = -5x - 34$.
Predpis (rovnica) lineárnej funkcie z úlohy **c)** je $f: y = 4$.
Predpis (rovnica) lineárnej funkcie z úlohy **d)** je $f: y = 3x - 4$.

2.4 Grafické riešenie lineárnych rovníc s jednou neznámou

Podstatou grafického riešenia rovníc (s neznámou *x*) je zistenie hodnoty *x*-ových súradníc priesečníkov grafov dvoch funkcií tvaru $y = f(x)$. Prvú funkciu získame dosadením výrazu (s premennou *x*) na ľavej strane danej rovnice namiesto $f(x)$ a druhú podobne, t.j. dosadením výrazu (s premennou *x*) na pravej strane danej rovnice namiesto $f(x)$.

V prípade grafického riešenia lineárnej rovnice zostrojíme do tej istej súradnicovej sústavy grafy dvoch lineárnych funkcií, napr. $y = l(x)$ a $y = p(x)$, pričom $l(x)$ je výraz na ľavej strane a $p(x)$ je výraz na pravej strane danej lineárnej rovnice.
Vieme, že grafom lineárnej funkcie je priamka. Pri vzájomnej polohe dvoch priamok v rovine môžu nastať tri prípady: priamky môžu byť rôznobežné, rovnobežné rôzne alebo rovnobežné totožné. Podľa toho, ktorý z uvedených prípadov nastane, môže mať lineárna rovnica jeden, žiaden alebo nekonečne veľa koreňov.
V prípade, že lineárna rovnica má jeden koreň, je to *x*-ová súradnica priesečníka priamok $y = l(x)$ a $y = p(x)$.

<u>Príklad 12</u>

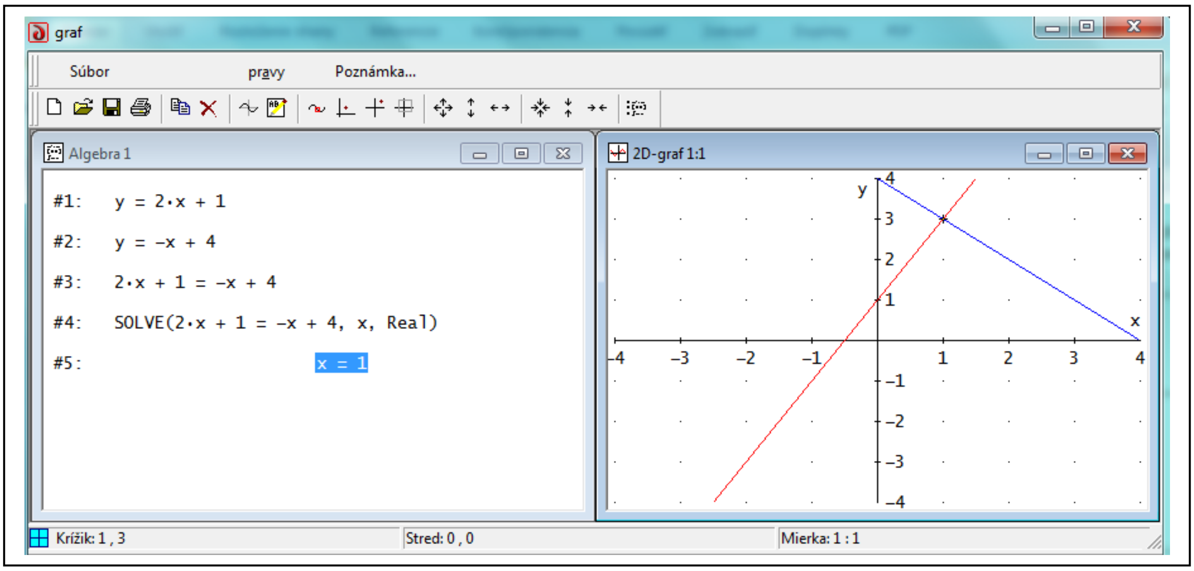
V *R* graficky vyriešte dané rovnice:

a) $2x + 1 = -x + 4$ **c)** $\frac{1}{2}x + 1 = \frac{1}{4}(4 + 2x)$ **e)** $1 - 2x = 3 - 2x$

b) $2x - 2 = 2x + 1$ **d)** $2x - 3 = \frac{x+1}{3}$ **f)** $3x + 3 = 2x - 2.$

Riešenie

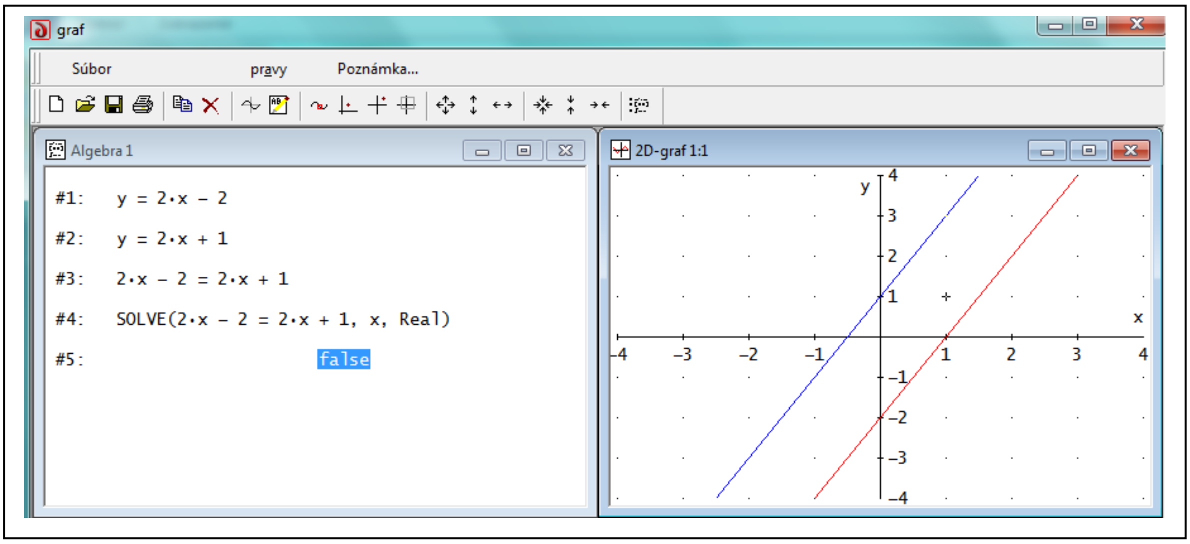
V programe Derive 6 postupne zostrojíme do tej istej súradnicovej sústavy dvojice grafov lineárnych funkcií. Zistíme počet priesečníkov priamok, ktoré dostaneme a urobíme záver o počte koreňov daných rovníc.
V prípade jedného koreňa určíme x-ovú súradnicu priesečníka zostrojených priamok, ktorá je hodnotou koreňa danej rovnice. Na zistenie uvedenej súradnice môžeme využiť funkciu „krížik“ v programe Derive 6.



Obrázok 36 Numerické aj grafické riešenie rovnice z úlohy **a)** Príkladu 12
Prameň: vlastný návrh

Na Obrázku 36 sú v okne Algebra v riadkoch #1 a #2 napísané predpisy funkcií potrebných na riešenie danej rovnice a v okne Grafika 2D je zobrazené samotné grafické riešenie. Všimnite si súradnice krížika v stavovom riadku grafického okna. Jeho x-ová súradnica je koreňom danej rovnice.
V okne Algebra je ďalej na Obrázku 36 v riadku #3 napísaná rovnica z úlohy **a)**, v riadku #4 je informácia programu Derive 6 o predošlom pokyne na numerické riešenie zadanej rovnice a v riadku #5 je uvedený koreň rovnice, ktorý program vypočítal.

Na Obrázku 37 je znázornené grafické aj numerické riešenie úlohy **b)**. Všimnite si, že priamky sú rovnobežné (rôzne), preto rovnica nemá riešenie. Pri numerickom riešení je v programe Derive 6 odpoveď „false", čo znamená, že daná rovnosť nikdy nenastane, teda, že rovnica nemá žiadne korene.



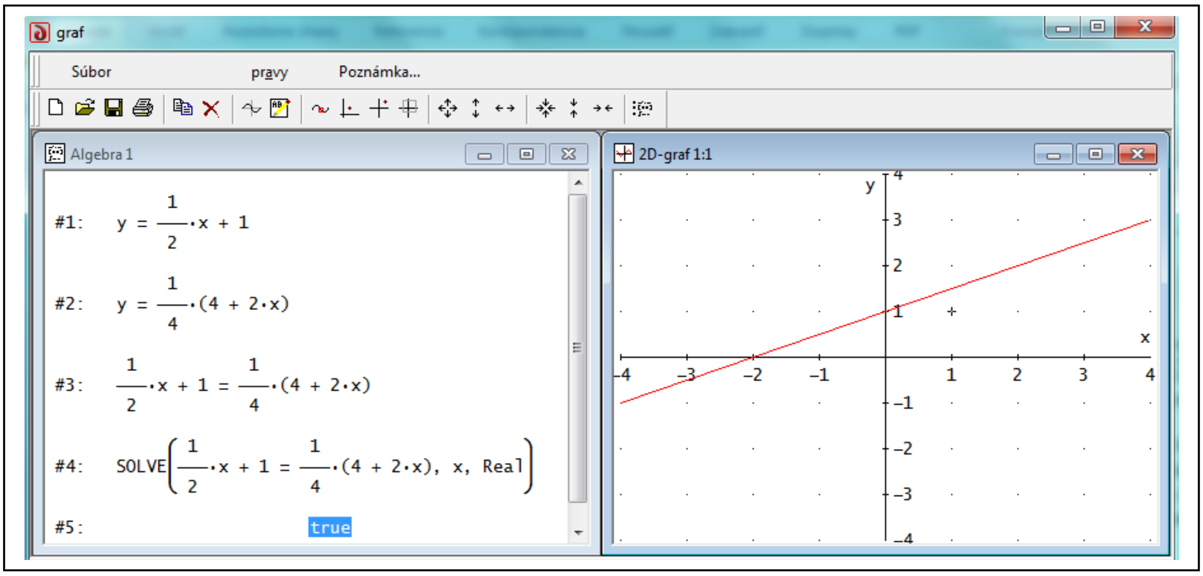
Obrázok 37 Numerické aj grafické riešenie rovnice z úlohy **b)** Príkladu 12
Prameň: vlastný návrh

Podobne na Obrázku 38 je znázornené grafické aj numerické riešenie úlohy **c)**. Všimnite si, že vzhľadom na to, že priamky sú (rovnobežné) totožné, to vyzerá akoby bola na obrázku len jedna priamka, preto má rovnica nekonečne mnoho koreňov. Pri numerickom riešení je v programe Derive 6 odpoveď „true", čo znamená, že daná rovnosť je vždy pravdivá, teda, že rovnica má nekonečne veľa koreňov. Sú nimi všetky body ležiace na priamke, ktorá je jej grafickým riešením.

Pri samotnom kreslení grafov lineárnych funkcií, ktoré sú (rovnobežné) totožné, je vidieť, ako sa menia farby grafu opakovaným stláčaním tlačidla , ktoré kreslí „nový" graf. To žiakov presvedčí, že „nový" graf je totožný s tým pôvodným, keďže ho úplne prekryje.

Výsledky Príkladu 12

a) jeden koreň; K = {1}
b) nemá koreň
c) nekonečne veľa koreňov
d) jeden koreň; K = {2}
e) nemá koreň
f) jeden koreň; K = {−5}.



Obrázok 38 Numerické aj grafické riešenie rovnice z úlohy **c)** Príkladu 12

Prameň: vlastný návrh

Poznámka

Nevýhodou grafického riešenia rovníc sú „približné" hodnoty koreňov. Preto je pri „ručnom" riešení potrebné dbať na presnosť zostrojovaných grafov.

2.5 Grafické riešenie lineárnych nerovníc s jednou neznámou

Podstatou grafického riešenia nerovníc s jednou neznámou (napr. x) je zistenie, pre aké hodnoty premennej x spĺňajú grafy dvoch funkcií tvaru $y = f(x)$ danú nerovnosť. Prvú funkciu získame dosadením výrazu (s premennou x) na ľavej strane danej nerovnice namiesto $f(x)$ a druhú podobne, t.j. dosadením výrazu (s premennou x) na pravej strane danej nerovnice namiesto $f(x)$.

V prípade grafického riešenia lineárnej nerovnice s jednou neznámou zostrojíme do tej istej súradnicovej sústavy grafy dvoch lineárnych funkcií, napr. $y = l(x)$ a $y = p(x)$, pričom $l(x)$ je výraz na ľavej strane danej lineárnej nerovnice a $p(x)$ je výraz na pravej strane danej lineárnej nerovnice.

V zadaní nerovnice sa môžu vyskytnúť štyri znaky nerovnosti medzi výrazmi na ľavej a pravej strane nerovnice:

- V prípade znaku nerovnosti $l(x) > p(x)$ hľadáme, pre ktoré reálne čísla x platí, že graf funkcie $l(x)$ je nad grafom funkcie $p(x)$, t.j. jeho funkčné hodnoty sú väčšie.
- V prípade znaku nerovnosti $l(x) \geq p(x)$ hľadáme, pre ktoré reálne čísla x platí, že graf funkcie $l(x)$ je v rovnakej výške alebo nad grafom funkcie $p(x)$, t.j. jeho funkčné hodnoty sú rovnaké alebo väčšie.
- V prípade znaku nerovnosti $l(x) \leq p(x)$ hľadáme, pre ktoré reálne čísla x platí, že graf funkcie $l(x)$ je v rovnakej výške alebo pod grafom funkcie $p(x)$, t.j. jeho funkčné hodnoty sú rovnaké alebo menšie.
- V prípade znaku nerovnosti $l(x) < p(x)$ hľadáme, pre ktoré reálne čísla x platí, že graf funkcie $l(x)$ je pod grafom funkcie $p(x)$, t.j. jeho funkčné hodnoty sú menšie.

Hodnoty premennej x, ktoré spĺňajú požadovanú nerovnosť „čítame" z x-ovej osi.

Príklad 13

V *R* graficky vyriešte dané nerovnice:

a) $x - 5 < 2x - 4$

b) $3 - 2x \geq \frac{1}{2}x - 2$

c) $\frac{x+2}{3} > \frac{x-2}{3}$

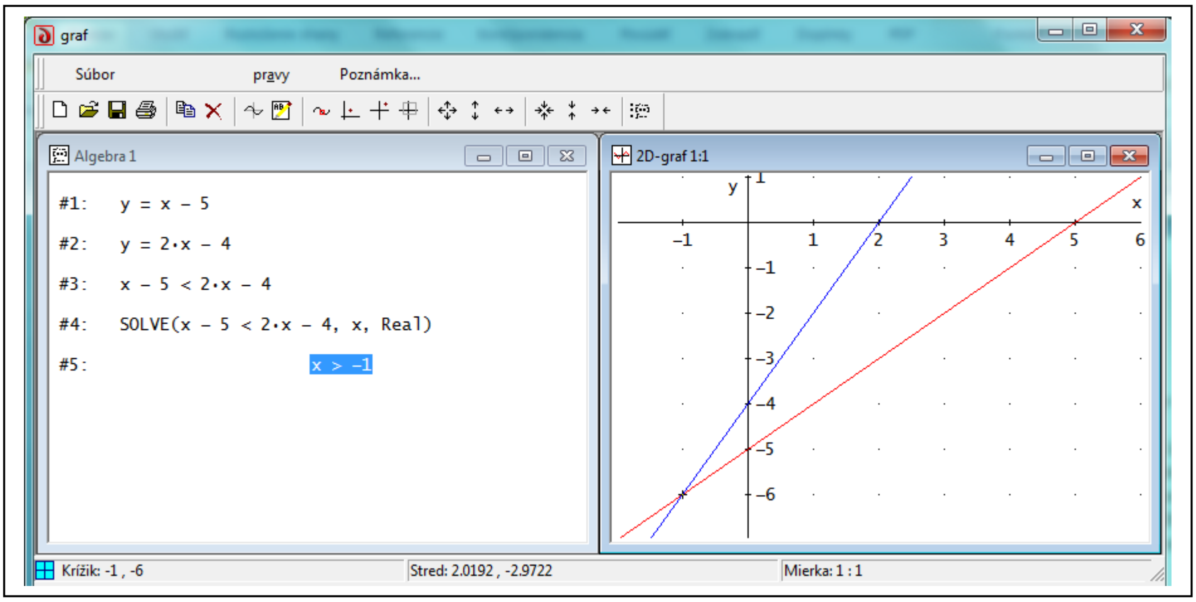
d) $\frac{x+3}{2} \leq \frac{x-3}{2}$

e) $2 - 3x < -1 - 3x$

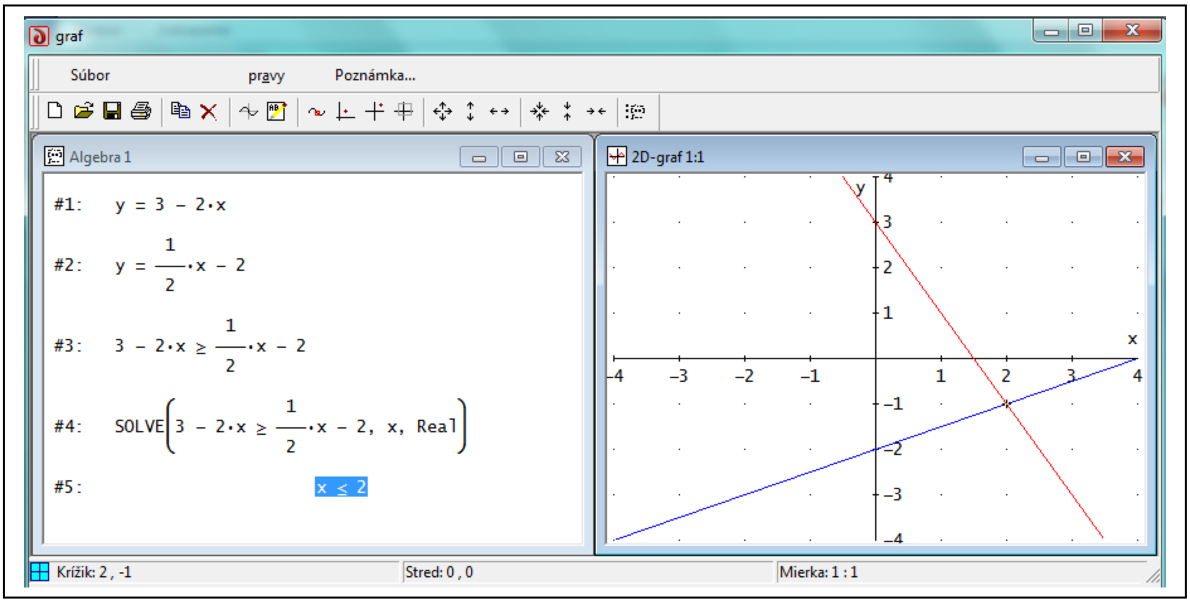
f) $3x + 5 \leq 3 + 5x.$

Riešenie

V programe Derive 6 postupne zostrojíme do tej istej súradnicovej sústavy dvojice grafov lineárnych funkcií.
V prípade rôznobežných priamok zistíme, začínajúc ktorým (resp. končiac ktorým) číslom *x* platí zadaná nerovnosť. Množinou koreňov danej nerovnice bude interval – otvorený, ak je daná ostrá nerovnosť, polouzavretý, ak je daná neostrá nerovnosť.
Na zistenie začiatočného (resp. koncového) bodu intervalu potrebujeme určiť x-ovú súradnicu priesečníka zostrojených priamok. Na zistenie uvedenej súradnice môžeme využiť funkciu „krížik" v programe Derive 6 (Obrázok 39 a 40).



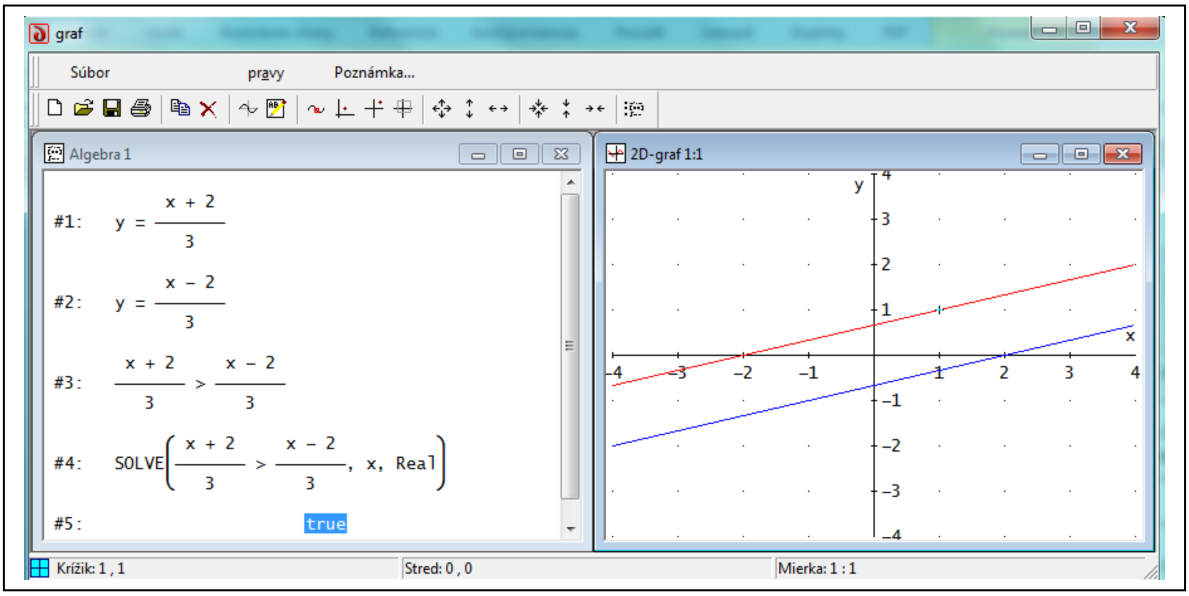
Obrázok 39 Numerické aj grafické riešenie nerovnice z úlohy **a)** Príkladu 13
Prameň: vlastný návrh



Obrázok 40 Numerické aj grafické riešenie nerovnice z úlohy **b)** Príkladu 13

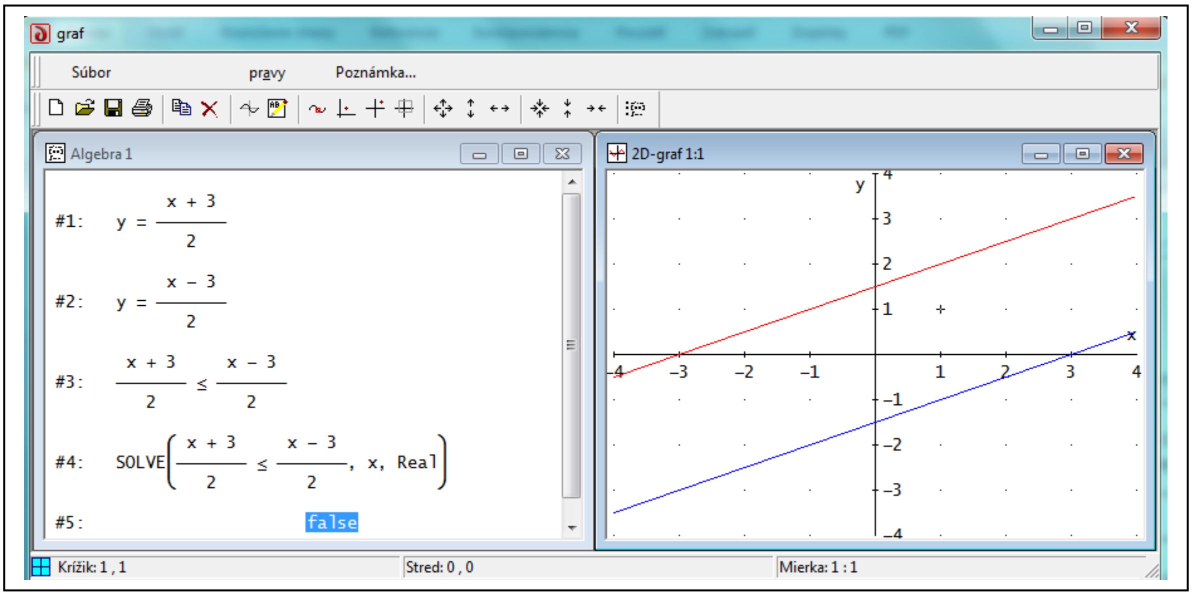
Prameň: vlastný návrh

V prípade, že priamky budú rovnobežné, zadaná nerovnosť buď nebude platiť nikdy, teda nerovnica nemá žiadne korene, alebo naopak zadaná nerovnosť bude platiť pre ľubovoľné reálne číslo, teda množinou jej koreňov bude celá množina *R* (Obrázok 41 a 42).



Obrázok 41 Numerické aj grafické riešenie nerovnice z úlohy **c)** Príkladu 13

Prameň: vlastný návrh



Obrázok 42 Numerické aj grafické riešenie nerovnice z úlohy **d)** Príkladu 13
Prameň: vlastný návrh

Výsledky Príkladu 13

a) K = (−1; ∞)
b) K = (−∞; 2⟩
c) K = *R*
d) K = ∅
e) K = ∅
f) K = ⟨1; ∞).

Poznámka
Nevýhodou grafického riešenia nerovníc, rovnako ako aj rovníc, sú „približné“ hodnoty začiatočných (resp. koncových) bodov intervalov, a to v prípade rôznobežnej dvojice priamok, ktorá je grafickým zobrazením danej nerovnice.
V programe Derive 6 sa môžeme o správnom riešení nerovníc presvedčiť aj numerickým výpočtom.

Poznámky k práci s lineárnymi nerovnicami v programe Derive 6:

- Pri písaní znakov nerovnosti v príkazovom riadku okna Algebra treba použiť tlačidlá matematických znakov pod príkazovým riadkom vpravo dolu (Obrázok 1, strana 7).
- Pri kreslení grafov jednotlivých funkcií si treba pamätať, akou farbou bol nakreslený ktorý graf, alebo ku grafom vkladať označenie (pomenovanie) pomocou tlačidla  v okne Grafika 2D. Na mojich obrázkoch 39 - 42 je vždy graf funkcie v riadku #1 nakreslený červenou farbou a graf funkcie s predpisom napísanom v riadku #2 je modrý.
- V prípade rôznobežných priamok, ktoré sú zobrazením lineárnych funkcií pri riešení lineárnej nerovnice, program uvádza korene rovnice v tvare nerovnosti, napr. Obrázok 39 a 40.
- V prípade rovnobežných priamok, ktoré sú zobrazením lineárnych funkcií pri riešení lineárnej nerovnice, program uvádza informáciu slovom „true“ alebo „false“, ktorých význam je rovnaký ako pri riešení rovníc, napr. na Obrázku 41 a 42.

3 VYUČOVANIE LINEÁRNYCH FUNKCIÍ S PROGRAMOM DERIVE 6

Musím priznať, že predtým, než som sama spoznala programový systém Derive, som na vyučovaní (okrem programu MS Excell pri štatistickom spracovaní údajov v štatistike v 3. ročníku) nepoužívala vôbec počítač. Doba však pokročila a ja som nechcela ostať len pri osvedčenej kriede a tabuli...
Avšak na druhej strane si myslím, že ani v dnešnej dobe nie je možné používať výpočtovú techniku (dokonca ani kalkulačku) silou-mocou na každej vyučovacej hodine. Vo svojej praxi sa snažím, aby hodiny matematiky neboli stereotypné. Mojim cieľom je preniesť čo najviac aktivity na žiakov. Som presvedčená, že niektoré zručnosti je nevyhnutné „natrénovať“ a zas iné sa žiakom ľahšie zapamätajú, keď ich sami objavia. Samostatné skúmanie a objavovanie poznatkov žiakmi je však časovo náročné. Vzhľadom na rozsah učiva mu preto počas školského roka nemôžem venovať veľký priestor. Ale pri učive o funkciách sa ho vždy snažím nájsť.

V predchádzajúcich kapitolách som opísala prostredie a niektoré možnosti využitia programu Derive 6 pri téme funkcie. Následne som uviedla trinásť konkrétnych príkladov (aj s ich riešením a výsledkami), ktoré používam na vyučovacích hodinách pri učive o lineárnych funkciách. Neopísala som celý priebeh jednotlivých vyučovacích hodín, len spôsob riešenia navrhnutých úloh v prostredí programu Derive 6.

Na Gymnáziu Jána Adama Raymana (GJAR) v Prešove máme počítačovú techniku (učiteľský počítač s prístupom na internet a podľa potreby s nainštalovaným softvérom) a dataprojektor k dispozícii vo viacerých učebniach. Keď však chcem k počítačom dostať jednotlivých žiakov, resp. dvojice žiakov, máme k dispozícii pre triedu s 30 žiakmi jednu multimediálnu učebňu s 15 žiackymi počítačmi a jedným učiteľským počítačom prepojeným s dataprojektorom. Okrem toho je tam aj tlačiareň a skener. Práve v tejto učebni zvyknem ukazovať prvákom možnosti využitia programu Derive 6 na hodinách venovaných lineárnym funkciám.

Najprv žiakov oboznámim s prostredím a spôsobom práce s novým softvérom. Metódy a postup riešenia jednotlivých príkladov vysvetlím na konkrétnych ukážkach úloh. Pojem „sústava rovníc“, či „graf funkcie“ nie je pre nich v tom čase nový. Pred témou *Lineárne funkcie* máme totiž v ŠkVP na GJAR zaradené funkcie vo všeobecnosti (spôsoby ich zadania a vlastnosti) a ešte predtým lineárne rovnice, nerovnice a ich sústavy.
Následne majú žiaci možnosť overiť si výsledky výpočtov získaných „ručne“ pri výpočtoch funkčných hodnôt, chýbajúcich súradníc bodov, či hľadaní predpisu lineárnej funkcie. Taktiež môžu sami objaviť správanie sa grafov lineárnych funkcií v závislosti od koeficientov v ich predpise.

Čo sa týka organizácie vyučovacích hodín, je to každý rok iné. Vždy sa musím rozhodnúť, pri ktorej časti učiva využijem program Derive 6. Najčastejšie je to práca s grafmi a hľadanie predpisu lineárnej funkcie. Tieto dve vyučovacie hodiny realizujem počas preberania lineárnych funkcií. Grafické riešenie lineárnych rovníc a nerovníc zvyknem robiť v poslednom, resp. predposlednom júnovom týždni (v rámci opakovania a upevňovania učiva), keď sú už uzavreté známky, ale vyučovanie ešte beží podľa riadneho rozvrhu hodín.
Príklady k jednotlivým aktivitám pripravím pre žiakov v tlačenej podobe. Každý dostane malý papierik s úlohami.

Žiaci si potom individuálne, resp. vo dvojiciach vyriešia jednotlivé úlohy zo zadaní. Svoje grafické a numerické riešenia si zvyčajne na hodine netlačia. Pomocou klávesy PrintScreen si ich môžu vložiť ako obrázky napr. do MS Word-u, príp. si ich ešte predtým môžu v jednoduchom kresliacom programe (napr. Skicár) upraviť. Stiahnu si ich na nejaké pamäťové médium (napr. USB kľúč), doma vytlačia a spolu so zadaním nalepia do zošita. Závery o vplyve jednotlivých parametrov na priebeh grafu lineárnej funkcie si zhrnieme spoločne. Rovnako si spolu prejdeme aj číselné výsledky zadaných úloh (funkčné hodnoty, predpisy jednotlivých funkcií, riešenia lineárnych rovníc a nerovníc).

4 OVERENÉ PRÍNOSY OPS

Moje skúsenosti potvrdzujú, že prepájanie „klasických" hodín matematiky s využitím kriedy a tabule a vyučovania s využitím počítačov a programu Derive 6 je väčšinou pozitívne hodnotené zo strany žiakov.
Lineárne funkcie sú vlastne prvou témou, pri ktorej Derive 6 v prvom ročníku využívam. Doteraz bol pre všetkých mojich žiakov tento program novinkou, nikdy predtým sa ešte s týmto programom v škole nestretli.

O to viac ma preto vždy zaujímajú ich názory na prácu s týmto programovým systémom. Vo svojich ústnych aj písomných hodnoteniach vyjadrujú svoje myšlienky, zaujímajú rôzne postoje a stanoviská. Väčšinou sú ich názory kladné. V minulosti uviedli napríklad, že práca s programom Derive 6 sa im páčila, lebo pre nich znamenala

- ✓ zmenu oproti „klasike" – tabuli a kriede,
- ✓ zaujímavú formu vyučovania matematiky,
- ✓ atraktívnu formu vyučovania matematiky,
- ✓ možnosť pracovať s počítačom,
- ✓ možnosť „objaviť" niečo nové,
- ✓ možnosť overiť si, čo sa naučili na ZŠ,
- ✓ prácu individuálnym tempom...

Na druhej strane však musím pripustiť, že každý rok sa nájde aj zopár žiakov, ktorých práca s počítačom, ani s programom Derive 6 nebaví. Svoj negatívny postoj vysvetľujú a zdôvodňujú napríklad tým, že

- „neznášajú" tému *Funkcie*,
- sa im nepáči grafická úprava programu Derive 6,
- Derive 6 je „trápny" program...

Citované názory žiakov som získala na základe rozhovorov s nimi počas realizácie jednotlivých vyučovacích hodín a hlavne v závere školského roka pri písomnom anonymnom vyjadrení svojich názorov a postojov k vyučovaniu matematiky v koncoročnom dotazníku.

ZÁVER

V tejto práci som opísala niektoré možnosti aplikácie programu Derive 6 do vyučovania matematiky pri problematike lineárnych funkcií v prvom ročníku štvorročného, resp. piatom ročníku osemročného gymnázia. Myslím, že by sa moje skúsenosti dali využiť aj na vyučovaní matematiky na základných školách.

Keďže Derive 6 je pre žiakov väčšinou úplne nový softvér, najprv som opísala prostredie programu a spôsob práce s ním. Následne som na trinástich konkrétnych príkladoch uviedla ukážky jeho využitia pri práci s lineárnymi funkciami, rovnicami a nerovnicami.

Väčšinu žiakov práca s programom Derive 6 zaujala a nadchla. Bola pre nich niečím inovatívnym v porovnaní s prevahou klasických vyučovacích hodín.

Verím, že pre učiteľov by mohla byť moja osvedčená pedagogická skúsenosť z edukačnej praxe východiskom a inšpiráciou na realizáciu podobných vyučovacích hodín.

ZOZNAM BIBLIOGRAFICKÝCH ZDROJOV

1. GABKOVÁ, J., OMACHELOVÁ, M. 2008. DERIVE ™ 6 ako na to. Slovenská technická univerzita v Bratislave. 2008. 334s. ISBN: 80-969562-3-X
2. GABKOVÁ, J., OMACHELOVÁ, M. 2006. DERIVE ™ 6 pre stredoškolských učiteľov. Slovenská technická univerzita v Bratislave. 2006. 134s. ISBN: 80-967305-3-3
3. HOLÉCZYOVÁ, S. 2007. Matematika pre stredoškolákov, Zbierka úloh 1. AKTUELL, Bratislava. 2007. 327s. ISBN: 978-80-89153-31-2
4. ODVÁRKO, O. 1990. Funkcie I. pre 1. ročník gymnázia. SPN, Bratislava. 1990. 120s. ISBN: 80-08-00524-6

Internetové zdroje

5. Kontuľová, J. 2012. Derive vo vyučovaní matematiky. MPC Bratislava. 2012. 44s. [cit. 1.5.2014] Dostupné na www: http://shared.mpc-edu.sk/web/OPSOSO%20III.%20kolo%20vyzvy%20na%20poziciu%20Odborny%20poradca%20vo%20vzdelavani/OPS_Kontulova%20Jana%20-%20Derive%20vo%20vyucovani%20matematiky.pdf
6. Zoznam kníh a CD-ROM edukačného balíka z Infoveku. [cit. 1.5.2014] Dostupné na www: http://www.gjar-po.sk/~gunis/sr/studium/edu_balik_infovek.htm