Moderné vzdelávanie pre vedomostnú spoločnosť / Projekt je spolufinancovaný zo zdrojov EÚ

PaedDr. Andrea Klačeková

Elektronický učebný text z vybraných kapitol z kombinatoriky

Osvedčená pedagogická skúsenosť edukačnej praxe

Prešov
2014

Vydavateľ:	Metodicko-pedagogické centrum, Ševčenkova 11, 850 01 Bratislava
Autor OPS/OSO:	PaedDr. Andrea Klačeková
Kontakt na autora:	SOŠ obchodu a služieb, SDH 3, 080 01 Prešov andrea.klacekova@gmail.com
Názov OPS/OSO:	Elektronický učebný text z vybraných kapitol z kombinatoriky
Rok vytvorenia OPS/OSO:	2014 VII. kolo výzvy
Odborné stanovisko vypracoval:	RNDr. Marta Megyesiová

Za obsah a pôvodnosť rukopisu zodpovedá autor. Text neprešiel jazykovou úpravou.

Táto osvedčená pedagogická skúsenosť edukačnej praxe bola vytvorená z prostriedkov národného projektu Profesijný a kariérový rast pedagogických zamestnancov.

Projekt je financovaný zo zdrojov Európskej únie.

Kľúčové slová

Kombinatorika, variácie, kombinácie, permutácie, variácie s opakovaním, kombinácie s opakovaním, permutácie s opakovaním, faktoriál čísla.

Anotácia

V práci je prezentovaná osvedčená pedagogická skúsenosť edukačnej praxe v predmete matematika na strednej odbornej škole. Predstavuje vyučovanie z vybraných kapitol z tematického celku Kombinatorika pomocou internetovej stránky www.kombinatorika.estranky.sk. Práca obsahuje návrh metodiky uplatnenia úloh vo vyučovaní predmetu matematiky pre študentov 3. ročníka SOŠ obchodu a služieb v Prešove. V práci predkladám príklady, cvičenia, vzorce a definície z daného tematického celku.

OBSAH

ÚVOD

Rozvoj vedy je okrem iného charakterizovaný tým, že pribúdajú nové poznatky. To spôsobuje, že všetky vedecké diela, učebnice nevynímajúc, starnú. Je to veľká škoda, pretože mnohé učebnice boli napísané na svoju dobu skutočne vynikajúco. Napísať nový učebný text z matematiky je preto veľmi neľahká úloha, lebo každý autor poznačí vlastný text svojím osobitým prístupom, vlastnou metodikou a vlastným výberom príkladov. Kvalitný učebný text nemožno zameniť s nijakými inými prostriedkami ani s vyučovaním učiteľa bez učebnice, dokonca ani s dokonalými technickými prostriedkami, ktoré nám súčasný moderný svet ponúka. Zodpovednosť jeho tvorby vyplýva najmä z toho, že učebný text zohráva rozhodujúcu úlohu vo vyučovacom procese. Je najdôležitejšou učebnou pomôckou pre žiakov, oporou práce učiteľa a určuje kvalitu učebného procesu.

Myšlienky kombinatoriky môžeme postretnúť v niektorých hádankách, aritmetických a geometrických výsledkoch vytvorených starými civilizáciami (Grécko, Čína). Avšak až v novodobej matematike sa kombinatorika objavila ako zrelá disciplína, hlavne zásluhou prác Laplacea, Pascala, Eulera a Fermata. Kombinatorika je, podľa môjho názoru, menej náročnou časťou matematiky, a to vôbec nemusím byť žiadnym matematickým géniom.. Je to tak trochu odbočenie od zložitých výpočtov, ale vzorcom sa nedá vyhnúť ani tu. S kombinatorikou sa môžeme stretnúť aj v bežnom živote - napríklad u zmrzlinára, ale o tom až na ďalších stranách.

Táto OPS môže pomôcť pri tvorbe učebných textov z daného predmetu, a zároveň môže slúžiť ako učebný materiál pre žiakov a vyučujúcich pri preberaní tematického celku Kombinatorika. Verím, že námety v predloženej práci poslúžia ako inšpirácia na zefektívnenie výsledkov a k obojstrannej spokojnosti učiteľa a žiaka vo výchovno-vzdelávacom procese v predmete matematika.

Jadro práce je rozdelené do troch kapitol. Obsahom prvej kapitoly je stručný metodický návod ako písať učebný text. Druhá kapitola je venovaná charakteristike OPS z hľadiska didaktiky, a zároveň predstavuje samotný učebný text z vybraných kapitol z kombinatoriky. Zahrňuje definície, zadania úloh, návody na ich riešenie, cvičenia na domáce precvičenie učiva. V tretej kapitole som popísala svoje skúsenosti z vyučovacích hodín.

1 ŠPECIFIKÁCIA CIEĽOVEJ SKUPINY OPS

Cieľovou skupinou, na ktorú je osvedčená pedagogická skúsenosť zameraná, sú pedagógovia prírodovedných disciplín pre úplné stredné vzdelávanie:

kategória pedagogických zamestnancov: učiteľ

podkategória: učiteľ matematiky pre úplné stredné vzdelávanie

typ školy, ročník: stredná odborná škola, 3. ročník

vyučovací predmet: matematika

tematický celok: Kombinatorika

1.1 Hlavný cieľ a čiastkové ciele OPS

Hlavným cieľom osvedčenej pedagogickej skúsenosti je poukázať na inovatívne a efektívne stratégie a aktivity vo vyučovaní matematiky s cieľom rozvíjať tvorivé schopnosti žiakov, ich tvorivé myslenie prostredníctvom webovej stránky.

Čiastkové ciele OPS:

- zvýšiť samostatnosť, aktivitu a záujem žiakov získavať nové vedomosti a zručnosti na hodinách matematiky,
- sprístupniť učivo v uvedenom tematickom celku do výchovno-vzdelávacom procese,
- vedieť uplatniť získané vedomosti ako súčasť všeobecného vzdelania v praxi každodenného života.
- rozvíjať inovatívne metódy a formy vo výučbe matematiky,
- rozvíjať medzipredmetové vzťahy (informatika).

1.2 Vymedzenie kompetencií

Kompetencie v oblasti IKT (kompetencie digitálne) – obsluhovať digitálne zariadenia, napr. počítač, dataprojektor, interaktívnu tabuľu.
Kompetencie prírodovedné – osvojiť si základné vedomosti v tematickom celku Kombinatorika a vedieť ich aplikovať v praxi.
Kompetencie smerujúce k iniciatívnosti – vhodne zvolenými interaktívnymi úlohami motivovať žiakov k zapojeniu sa do edukačného procesu.
Kompetencie k čitateľskej gramotnosti – získavať nové informácie, aktívne vyhľadávanie úlohy na internete z odborných zdrojov.
Kompetencie komunikatívne – vedieť prezentovať a zdôvodniť vlastný názor v diskusiách, vedieť argumentovať a rešpektovať názor iných.
Kompetencie riešiť problémy – vedieť kooperatívne pracovať a získavať nové vedomosti, zručnosti prostredníctvom zadaných úloh.

1.3 Východisková situácia OPS

Veľká neobľúbenosť predmetu matematika spočíva v tom, že žiaci nevidia význam predmetu matematika v bežnom živote, pričom s praktickou matematikou sa stretávame častokrát na miestach mimo školy (kuchyňa, banka, domácnosť, obchody).
Slabá zapojenosť žiakov do prírodovedných súťaží: matematických, fyzikálnych, chemických olympiád.
Dôsledkom je aj dosahovanie priemerných až nízkych výsledkov v prírodovednej gramotnosti.
Celkové znechutenie žiakov k učeniu, preto je potrebné nastaviť obsah učiva tak, aby sa žiaci učili efektívne a najmä to, čo bude pre nich užitočné.
Reálne východisko: posun vyučovania prírodovedných predmetov z transmisívnej roviny do konštruktivistickej roviny.
Inovatívnym spôsobom výučby a získavaním vedomosti a zručností budú žiaci viac motivovaní k zvýšenej aktivite, získajú pocit sebauspojenia.

1.4 Kontext a rámec

OPS **Elektronický učebný text z vybraných kapitol z kombinatoriky** patrí do:

Typ školy: SOŠ

Východiská: využitie uvádzanej OPS si vyžaduje od učiteľa aj žiakov základné zručnosti práce s počítačom, internetom, dataprojektorom, interaktívnou tabuľou. Úlohy môžeme kombinovať buď cez webovú stránku alebo prostredníctvom interaktívnej tabule v učebni. Na konci každej podkapitoly žiaci si overia svoje vedomosti v teste.

2 TEORETICKÉ VÝCHODISKÁ PÍSANIA UČEBNÉHO TEXTU

2.1 Vymedzenie základných pojmov

Pod pojmom text rozumieme písomnú formu komunikácie – dorozumievania sa, výmeny informácii medzi ľuďmi (Turek, 2009).

Didaktický text je akýkoľvek text, ktorý je skonštruovaný tak, aby bol nositeľom didaktickej informácie. Didaktická informácia je informácia určená pre didaktické, t.j. vyučovacie účely.
Zrozumiteľný text je text, ktorý je ľahko, dobre, príjemne čitateľný, jednoduchý, prehľadný, výstižný, zaujímavý.
Učebnica – učebný text je didaktický text, ktorý prezentuje učivo za účelom jeho osvojenia si študujúcimi. Učebnica je najdôležitejším nositeľom učiva, učivo je v nej najviac konkretizované. Učebnica má vychádzať z učebných osnov, konkretizovať to, čo učebné osnovy konkretizujú. Učebnica zohráva rozhodujúcu úlohu vo vyučovacom procese, je najdôležitejšou učebnou pomôckou pre študentov a oporou práce učiteľa.

2.2 Funkcie učebného textu

Učebný text (Bajtoš, 1999) má spĺňať tieto funkcie:

1. informačnú – prezentovať učivo, ktoré si majú žiaci osvojiť, určiť základné učivo
2. motivačnú – zabezpečiť motiváciu žiakov, vzbudiť a udržať ich záujem pri učení z učebnice
3. komunikačnú – rozvíjať slovnú zásobu žiaka, žiak učiaci sa z učebnice si prispôsobuje a dotvára text
4. systémovú – zabezpečiť logickú postupnosť učiva, jeho usporiadanie do systému
5. transformačnú – prepracovať systém vedeckých poznatkov do učiva na základe didaktických princípov
6. aplikačnú – uvádzať príklady z reálnej praxe, námety na využitie učiva v živote
7. integračnú – neobmedzovať sa len na konkrétny predmet, ale hľadať vzťahy k iným predmetom – medzipredmetové vzťahy, komplexnejšie poznávať predmety a javy
8. inovačnú – prezentovať najnovšie poznatky vedy a techniky
9. kontrolnú a usmerňovaciu - využívať text, kontrolné otázky a úlohy na vlastnú kontrolu, poskytovať pomoc a spätnú väzbu pri osvojovaní učiva a pri orientácii sa v učive
10. sebavzdelávaciu - formovať potreby a schopnosti samostatne a pritom racionálne sa učiť
11. rozvíjajúcu a výchovnú – zabezpečiť rozvoj schopností a formovania postojov žiakov

2.3 Požiadavky na učebný text

Pri tvorbe učebného textu (Turek, 1997) treba dodržiavať didaktické zásady, t.j. pravidlá, smernice a požiadavky, ktoré usmerňujú vznik a priebeh vyučovacieho procesu, aby sa dosiahli optimálne výsledky procesu učenia sa. Obsah učebného textu má byť úplný, dôkladne premyslený, jeho spracovanie má byť jasné, presné, prehľadné a má byť primeraný schopnostiam študentov. Aby sme dosiahli čo najefektívnejšie výsledky procesu vzdelávania pri tvorbe učebného textu je potrebné dodržiavať tieto didaktické zásady:

1. Zásada vedeckosti – vyjadruje požiadavku, aby obsah učiva a spôsob jeho prezentácie v učebnici boli v súlade sa najnovšími výsledkami vedy.
2. Zásada jednoty teórie a praxe – zásada vyžaduje interpretovať vedecké poznatky ako zovšeobecnené a systematické výsledky spoločensko-historickej praxe, ako veda slúži praxi a pomáha pretvárať život, ako sa pravdivosť vedeckých zákonov a teórií dokazuje v praxi. Pri každom dôležitom prvku učiva (pojme, princípe, zákone atď.) je potrebné uvádzať presvedčivé príklady ilustrujúce jeho využitie v praxi (v priemysle, v ekonomike a pod).
3. Zásada primeranosti – zásada vyžaduje, aby obsah učiva v učebnici, jeho rozsah a spôsob jeho prezentácie zodpovedali reálnym možnostiam a schopnostiam študentov. Realizácia tejto zásady pri tvorbe učebnice je spojená s určitými ťažkosťami, ktoré vyplývajú z toho, že nie všetci študenti, ktoré sa budú učiť z učebnice, majú rovnaké možnosti a schopnosti. Navyše študenti sa odlišujú aj štýlmi učenia sa. Preto je vhodné rozčleniť text učebnice na základný a doplňujúci.
4. Zásada názornosti – ide o požiadavku, aby učivo bolo prezentované v učebnici tak, aby si študujúci utvárali jasné a presné predstavy a pojmy. Pri tvorbe učebnice sa realizuje zaraďovaním obrázkov, schém, náčrtov, diagramov, tabuliek, prehľadov a pod. U jednotlivých prvkov učiva (pojmov, zákonov) je potrebné uvádzať ich konkrétne ukážky, príklady praktického použitia.
5. Zásada sústavnosti – ide o usporiadanie učiva do ucelenej, prehľadnej sústavy-systému, v ktorom sa poznatky usporadúvajú tak, aby sa nasledujúce opierali o predchádzajúce, aby jeden poznatok logicky vyplýval z druhého.

2.4 Štruktúra učebného textu

Rozdelenie učebného textu na jednotlivé časti ovplyvňuje jeho príťažlivosť pre študujúcich, ako aj jeho zrozumiteľnosť. Učebný text by mal mať takúto štruktúru:

- obsah
- úvod
- kapitoly a podkapitoly
- riešenie cvičení a ich výsledky (môžu byť uvedené aj na konci učebného textu)
- prehľad použitých veličín a ich jednotiek
- vybrané tabuľky
- literatúra
- vecný register
- literatúra (Turek, 1997).

3 NÁVRH UČEBNÉHO TEXTU Z KOMBINATORIKY

Znalosť učiva tematického okruhu Kombinatorika je nevyhnutným predpokladom pre témy Pravdepodobnosť a Štatistika.
V tejto časti ponúkam vybrané kapitoly z tematického okruhu Kombinatorika, ktoré som spracovala pre moje osobné využitie na hodinách matematiky na SOŠ obchodu a služieb v Prešove v III.O triede a III.I triede. Navrhovaný učebný text je rozdelený do šiestich podkapitol. V každej podkapitole sa najskôr venujem výkladu učiva, kde sú zahrnuté základné pojmy ako definícia, vzorec, vlastnosti. Ďalej kapitola ponúka príklady, na ktorých sa daná definícia, vzorec vysvetlí, precvičí a upevní. Príklady som zostavovala od jednoduchších k zložitejším. Krok po kroku ukazujem ich postup. V závere každej kapitoly ponúkam cvičenia na domáce upevnenie učiva.

3.1 Faktoriál čísla n

Pri zavedení pojmu faktoriál, je nevyhnutné ukázať jeho výpočet na konkrétnych príkladoch. Teda ako ho získať. Na tejto názornej ukážke si žiaci dokážu automaticky zapamätať faktoriály jednotlivých čísel, čo bude výhodou pri počítaní nasledujúcich príkladov. Už faktoriál čísla 4! budú žiaci sami komentovať.
1! = 1
2! = 2.1 = 2
3! = 3.2.1 = 6
4! = 4.3.2.1= 24
5! = 5.4.3.2.1 = 120
6! = 6.5.4.3.2.1 = 720
7! = 7.6.5.4.3.2.1 = 5 040
8! = 8.7.6.5.4.3.2.1 = 40 320
9! = 9. 8.7.6.5.4.3.2.1 = 362 880
10! = 10. 9. 8.7.6.5.4.3.2.1 = 3 628 800

Určite je potrebné žiakov upozorniť na faktoriál z čísla 0. Teda 0! = 1.
Týmito jednoduchými príkladmi ich učiteľ motivuje k prvej úlohe. V nej majú tieto základné výpočty aplikovať. Tu si okrem pojmu faktoriál precvičia sčítanie čísel a mocninu čísla.

1. Vypočítajte:

a) 2! + 0!
b) 3.2! + (2.3)! + (2!)!
c) $6.2! + (2^2)! + (3!)$

Riešenie:

a) 2! + 0!= 2.1+1=3
b) 3.2! + (2.3)! + (2!)! = 3.2.1 + 6! + (2.1)! = 6 + 6.5.4.3.2.1 + 2! = 6 + 720 + 2.1 = 6 + 720 + 2 =728
c) $6.2! + (2^2)! + (3!)$= 6.2.1 + 4! + (3.2.1)! = 12 + 4.3.2.1 +6 = 12 + 24 + 6 = 42

V nasledujúcom cvičení obdobne vyžadujeme faktoriál čísla, kde musia žiaci dávať pozor, ktorá operácia má prednosť pri výpočte. Tu ich môžeme upozorniť, že je na každom z nich, pre aký spôsob výpočtu sa rozhodnú. Buď si vyčíslia faktoriál čísla aj v čitateli aj v menovateli, a potom ho predelia a dostanú výsledok. Alebo budú faktoriál daného čísla upravovať systémom krátenia tzn., že faktoriál väčšieho čísla si upravia po menší faktoriál, a dané rovnaké faktoriály vykrátia a hodnotu zlomku vyčíslia.

Napríklad:

$\frac{7!}{4!} = \frac{5040}{24} = 210$ alebo $\frac{7!}{4!} = \frac{7.6.5.4!}{4!} = \frac{7.6.5.}{1} = 210$

2. Vypočítajte:

a) $\frac{\mathbf{8!}}{\mathbf{4!}}$ b) $\frac{\mathbf{8!}}{\mathbf{4!+4!}}$ c) $\frac{\mathbf{8!}}{\mathbf{4!.4!}}$ d) $\frac{\mathbf{8!}}{\mathbf{4.4!}}$

Riešenie:

a) $\frac{8!}{4!} = \frac{8.7.6.5.4.3.2.1}{4.3.2.1} = 8.7.6.5 = 1680$

b) $\frac{8!}{4!+4!} = \frac{8.7.6.5.4.3.2.1}{4.3.2.1+4.3.2.1} = \frac{40320}{24+24} = \frac{40320}{48} = 840$

c) $\frac{8!}{4!.4!} = \frac{8.7.6.5.4.3.2.1}{4.3.2.1\ .\ 4.3.2.1} = \frac{40320}{24\ .24} = \frac{40320}{576} = 70$

d) $\frac{8!}{4.4!} = \frac{8.7.6.5.4.3.2.1}{4\ .\ 4.3.2.1} = \frac{40320}{96} = 420$

Pred ďalšími cvičeniami je nutné žiakov upozorniť, že budú v príklade postupovať nasledovne: upravovať väčší faktoriál k menšiemu faktoriálu, aby rovnaký faktoriál čísla mohli vykrátiť. Keďže v b) a c) zadaní ich to môže zlákať k tomu, že rovnaký faktoriál budú krátiť, čo nie je správny postup, keďže medzi číslami máme operáciu sčítania. Najskôr si upravia každé číslo na rovnaký faktoriál (postupujú stále rovnako väčší faktoriál si upravím po menší faktoriál), potom v ďalšom kroku použijú vynímanie spoločného faktoriálu pred zátvorku. Dopracujú sa k tomu, že rovnaký faktoriál si môžu vykrátiť. A daný zlomok upravia na základný tvar.

3. Zjednodušte:

a) $\frac{\mathbf{2!.5!.6!}}{\mathbf{7!.4!.3!}}$ b) $\frac{\mathbf{25!+26!}}{\mathbf{27!}}$ c) $\frac{\mathbf{8.8!+7.7!}}{\mathbf{7.8!-8.7!}}$

Riešenie:

a) $\frac{2!.5!.6!}{7!.4!.3!} = \frac{2!.5.4!6!}{7.6!.4!.3.2!} = \frac{5}{7.3} = \frac{5}{21}$

b) $\frac{25!+26!}{27!} = \frac{25!.(1+26)}{27.26.25!} = \frac{25!.27}{27.26.25!} = \frac{1}{26}$

c) $\frac{8.8!+7.7\ !}{7.8!-8.7!} = \frac{8.8.7!+7.7!}{7.8.7!-8.7!} = \frac{7!.(8.8+7)}{7!.(7.8-8)} = \frac{71}{48}$

4. Upravte na spoločného menovateľa:

a) $\frac{3}{12!} + \frac{5}{13!}$ b) $\frac{2}{15!} - \frac{8}{16!}$ c) $\frac{3}{5!} - \frac{20}{7!} + \frac{2}{6!}$

Riešenie:

a) $\frac{3}{12!} + \frac{5}{13!} = \frac{3}{12!} + \frac{5}{13.12!} = \frac{3.13+5}{13!} = \frac{39+5}{13!} = \frac{44}{13!}$

b) $\frac{2}{15!} - \frac{8}{16!} = \frac{2}{15!} - \frac{8}{16.15!} = \frac{2.16-8}{16!} = \frac{32-8}{16!} = \frac{24}{16!}$

c) $\frac{3}{5!} - \frac{20}{7!} + \frac{2}{6!} = \frac{3}{5!} - \frac{20}{7.6.5!} + \frac{2}{6.5!} = \frac{3.7.6-20+2.7}{7!} = \frac{126-20+14}{7!} = \frac{120}{5040} = \frac{1}{42}$

Keď žiaci zvládli predchádzajúcich pár zadaní, v ktorých sme mali faktoriál čísla, nebude problém čísla zameniť za písmená. Pred týmto cvičením by bolo vhodné ešte raz zopakovať ako upravujeme faktoriál čísla. Opäť treba žiakom prízvukovať to, že čo má v danom zlomku väčšiu hodnotu – čitateľ alebo menovateľ. Tiež je potrebné žiakov upozorniť, že pri zápornom čísle je stále väčšie to, čo je bližšie k číslu 0. Pri podmienkach opäť vychádzame z definície, že n N.
Názorná podrobná ukážka úpravy faktoriálu:

$(n+10)! = \ (n+10).\ (n+9).\ (n+8)\ .\ (n+7) \dots\dots\dots\dots\dots\dots.\ .(n+3).\ (n+2).\ (n+1).(n).\ (n-1).(n-2).\ (n-3).\ \dots.\ .(n-8)\dots.$

5. Kráťte a určte podmienky pre n:

a) $\frac{(n+1)!}{n!}$

b) $\frac{(n+1)!}{(n-1)!}$

c) $\frac{n!}{(n-3)!}$

d) $\frac{(n-50)!}{(n-49)!}$

e) $\frac{(n-5)!}{(n-3)!}$

f) $\frac{(n+5)!}{(n+3)!}$

g) $\frac{(4n)!}{(4n-1)!}$

h) $\frac{(5n-2)!}{(5n-3)!}$

Riešenie:

a) $\frac{(n+1)!}{n!} = \frac{(n+1).n!}{n!} = (n+1), kde n \geq -1\ a zároveň n \geq 0$, tzn. $n \geq 0, n \in< 0, \infty)$

b) $\frac{(n+1)!}{(n-1)!} = \frac{(n+1).n.(n-1)!}{(n-1)!} = (n+1).n, kde n \geq 1, n \in< 1, \infty)$

c) $\frac{n!}{(n-3)!} = \frac{n.(n-1).(n-2).(n-3)!}{(n-3)!} = n.(n-1).(n-2), kde n \geq 3, n \in< 3, \infty)$

d) $\frac{(n-50)!}{(n-49)!} = \frac{(n-50)!}{(n-49).(n-50)!} = \frac{1}{(n-49)}, kde n \geq 50, n \in< 50, \infty)$

e) $\frac{(n-5)!}{(n-3)!} = \frac{(n-5)!}{(n-3).(n-4).(n-5)!} = \frac{1}{(n-3).(n-4)}, kde n \geq 5, n \in< 5, \infty)$

f) $\frac{(n+5)!}{(n+3)!} = \frac{(n+5).(n+4).(n+3)!}{(n+3)!} = (n+5).(n+4), kde n \geq -3, n \in< -3, \infty)$

g) $\frac{(4n)!}{(4n-1)!} = \frac{4n.(4n-1)!}{(4n-1)!} = 4n, kde n \geq 1, n \in< 1, \infty)$

h) $\frac{(5n-2)!}{(5n-3)!} = \frac{(5n-2).(5n-3)!}{(5n-3)!} = (5n-2), kde n \geq 1, n \in< 1, \infty)$

Nasledujúcich 15 cvičení je na domáce precvičenie žiakov. Na konci vyučovacej hodiny im z daných cvičení vyberieme príklady, na ktorých si precvičia a upevnia vedomosti z hodiny.

Cvičenie:

1. 4!+5.7!-0!+(9-2)!
2. (7-5)!+3.3!+1!
3. $[(4-2)!]^2 + [(3-8.0)!]^3$
4. $\frac{6!}{4!}$
5. $\frac{6!}{3!.4!}$
6. $\frac{6!}{3!+4!}$
7. $\frac{6!.12!.8!}{13!.4!.10!}$
8. $\frac{16!.5!.28!}{3!.14!.29!}$
9. $\frac{5}{15!} + \frac{8}{16!}$
10. $\frac{12}{18!} - \frac{4}{17!}$
11. $\frac{10.10!+9.9!}{9.10!-10.9!}$
12. $\frac{15!+16!}{17!}$
13. $\frac{(n+2)!}{(n-1)!}$
14. $\frac{(2n+1)!}{(2n-1)!}$
15. $\frac{(6n)!}{(6n-2)!}$

3.2 Kombinačné číslo, vlastnosti kombinačných čísel

Definícia: Pre každé dve nezáporné celé čísla $k \leq n$ kombinačným číslom „ n nad k “ nazývame číslo $\binom{n}{k} = \frac{n!}{(n-k)!.k!}$ (2.1)

Všimnime si najskôr niektoré špeciálne prípady.
Ak je n ľubovoľné prirodzené číslo a $k = 0$, platí:
$\binom{n}{0} = \frac{n!}{0!.(n-0)!} = \frac{n!}{0!.n!} = 1$ (2.2)

Zapamätajme si aj tento vzťah:
$\binom{0}{0} = 1$ (2.3)

Ďalej je zrejmé, že pre každé celé kladné číslo n platí:
$\binom{n}{1} = \frac{n!}{1!.(n-1)!} = \frac{n.(n-1)!}{(n-1)!} = n$ (2.4)
$\binom{n}{n} = 1$ (2.5)
$\binom{n}{n-1} = n$ (2.6)

Tento výsledok vyplýva aj z toho, že kombinačné číslo $\binom{n}{1}$ udáva počet všetkých kombinácií prvej triedy z n prvkov, t.j. počet všetkých jednoprvkových podmnožín n - prvkovej množiny, ktorých je n.

Dôležitú vlastnosť kombinačných čísel udáva veta:
Pre všetky také prirodzené čísla n, k, že $n \geq k$, platí:
$\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$ (2.7)

Kombinačné číslo $\binom{n}{k}$ určuje počet všetkých k-prvkových podmnožín množiny M a kombinačné číslo $\binom{n}{n-k}$ počet všetkých príslušných „doplnkov“ k týmto množinám. Tento počet musí byť rovnaký, pretože každej k-prvkovej podmnožine množiny M môžeme jednoznačne priradiť jej „doplnok“, t.j. tú podmnožinu, ktorá obsahuje zvyšných n-k prvkov množiny M. Kombinácie C(k,n) a C(n-k,n) preto nazývame vzájomne doplnkové kombinácie.

Pre všetky také celé čísla k, n že $0 \leq k < n$, platí
$\binom{n}{k} + \binom{n}{k+1} = \binom{n+1}{k+1}$ (2.8)
Tento vzorec je súčtový vzorec pre kombinačné čísla.

V nasledujúcom cvičení využijeme definíciu kombinačného čísla.

1. **Kombinačné čísla $\binom{6}{2}$, $\binom{6}{4}$, $\binom{4}{4}\binom{8}{0}$, $\binom{9}{6}$ vypočítajte**
   a) **pomocou definície,**
   b) **pomocou kalkulačky,**
   c) **vyhľadaním výsledku v Pascalovom trojuholníku.**

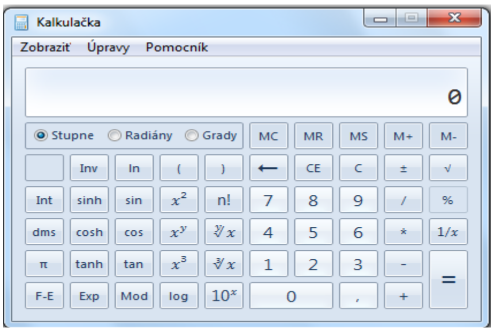
Riešenie:

a) pomocou definície

$$\binom{6}{2} = \frac{6!}{(6-2)!.2!} = \frac{6!}{4!.2!} = \frac{6.5.4!}{4!.2} = \frac{30}{2} = 15$$
$$\binom{6}{4} = \frac{6!}{(6-4)!.4!} = \frac{6!}{2!.4!} = \frac{6.5.4!}{2.4!} = \frac{30}{2} = 15$$
$$\binom{6}{2} = \binom{6}{4}$$
$$\binom{4}{4} = \frac{4!}{(4-4)!.4!} = \frac{4!}{0!.4!} = 1$$
$$\binom{8}{0} = \frac{8!}{(8-0)!.0!} = \frac{8!}{8!.0!} = 1$$
$$\binom{9}{6} = \frac{9!}{(9-6)!.6!} = \frac{9!}{3!.6!} = \frac{9.8.7.6.!}{3.2.1.6!} = \frac{504}{6} = 84$$

b) pomocou kalkulačky

Kalkulačku ponúka operačný systém počítača, ak si otvoríme Štart menu/programy/príslušenstvo.



Obrázok 1 Náhľad kalkulačky, ktorú ponúka OS Windows
Zdroj: vlastný prameň

c) vyhľadaním výsledku v Pascalovom trojuholníku.

Vlastnosti kombinačných čísel, ktoré sme uviedli, možno ilustrovať aj na nasledujúcej schéme, ktorá sa nazýva Pascalov trojuholník (Obr. 2).

n = 0 $\binom{0}{0}$

n = 1 $\binom{1}{0}$ $\binom{1}{1}$

n = 2 $\binom{2}{0}$ $\binom{2}{1}$ $\binom{2}{2}$

n = 3 $\binom{3}{0}$ $\binom{3}{1}$ $\binom{3}{2}$ $\binom{3}{3}$

n = k $\binom{k}{0}$ $\binom{k}{1}$ . . . . $\binom{k}{k-1}$ $\binom{k}{k}$

Obrázok 2 Schéma Pascalovho trojuholníka
Zdroj: http://czadro1.webnode.sk/news/pascalov-trojuholnik/

Keď kombinačné čísla v tejto schéme vyčíslime, môžeme Pascalov trojuholník zapísať takto:

1
1 1
1 2 1
1 3 3 1
1 4 6 4 1
1 5 10 10 5 1
1 6 15 20 15 6 1
1 7 21 35 35 21 7 1
1 8 28 56 70 56 28 8 1
1 9 36 84 126 126 84 36 9 1
1 10 45 120 210 252 210 120 45 10 1

Schéma Pascalovho trojuholníka je utvorená podľa týchto pravidiel:

1. začína sa číslom $\binom{0}{0}$,

2. v každom riadku je prvé (posledné) kombinačné číslo písané o jedno miesto doľava (doprava) oproti prvému (poslednému) kombinačnému číslu v predchádzajúcom riadku,
3. ostatné kombinačné čísla sú písané medzi dve susedné čísla predchádzajúceho riadka.

Pre prvky Pascalovho trojuholníka platí:
1. Podľa vzťahov (2.2), (2.5) prvé aj posledné číslo v každom riadku je rovná 1.
2. Podľa vzťahu (2.8) každé iné číslo sa rovná súčtu čísel stojacich nad ním naľavo a napravo, napr. $\binom{3}{2} = \binom{2}{1} + \binom{2}{2}$

Podľa týchto vlastností môžeme teraz napísať čísla Pascalovho trojuholníka bez toho, aby sme počítali jednotlivé kombinačné čísla:

$$
\begin{array}{ccccccccccc}
 & & & & & 1 & & & & & \\
 & & & & 1 & & 1 & & & & \\
 & & & 1 & & 2 & & 1 & & & \\
 & & 1 & & 3 & & 3 & & 1 & & \\
 & 1 & & 4 & & 6 & & 4 & & 1 & \\
1 & & 5 & & 10 & & 10 & & 5 & & 1
\end{array}
$$

Všimnite si, že zhodné čísla v každom riadku Pascalovho trojuholníka sú umiestnené súmerne vzhľadom na os súmernosti tohto trojuholníka. Toto symetrické rozmiestnenie je spôsobené tým, že pre kombinačné čísla platí $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$

Kombinačné číslo $\binom{6}{2}$ sa nachádza v riadku 6, a je to tretí člen.

$\binom{6}{2}$

$$
\begin{array}{ccccccccccccccccc}
 & & & & & & & & 1 & & & & & & & & \\
 & & & & & & & 1 & & 1 & & & & & & & \\
 & & & & & & 1 & & 2 & & 1 & & & & & & \\
 & & & & & 1 & & 3 & & 3 & & 1 & & & & & \\
 & & & & 1 & & 4 & & 6 & & 4 & & 1 & & & & \\
 & & & 1 & & 5 & & 10 & & 10 & & 5 & & 1 & & & \\
 & & 1 & & 6 & & 15 & & 20 & & 15 & & 6 & & 1 & & \\
 & 1 & & 7 & & 21 & & 35 & & 35 & & 21 & & 7 & & 1 & \\
1 & & 8 & & 28 & & 56 & & 70 & & 56 & & 28 & & 8 & & 1
\end{array}
$$

Podobne určíme aj ďalšie kombinačné čísla.

2. **Vyjadrite jedným kombinačným číslom**:

a) $\binom{15}{2} + \binom{15}{3}$

b) $\binom{30}{7} + \binom{30}{6}$

c) $\binom{13}{2} + \binom{13}{10}$

d) $\binom{10}{10} + \binom{11}{10} + \binom{12}{10} + \binom{13}{10} + \binom{14}{10} + \binom{15}{10}$

Riešenie:

a) Tieto dva sčítance vypočítame použitím vzorce (2.8) a postupne dostaneme

$$\binom{15}{2}+\binom{15}{3}=\binom{16}{3}$$

b) Opäť využijeme vzorec (2.8)

$$\binom{30}{7}+\binom{30}{6}=\binom{31}{7}$$

c) Prvého sčítanca opíšeme a druhého $\binom{13}{10}$nahradíme podľa (2.7) na $\binom{13}{3}$, a opäť využijeme vzorec (2.8)

$$\binom{13}{2}+\binom{13}{10}=\binom{13}{2}+\binom{13}{3}=\binom{14}{3}$$

d) Prvého sčítanca $\binom{10}{10}$nahradíme podľa (2.5) rovnako veľkým číslom $\binom{11}{11}$. Potom použijeme vzorec (2.8) a postupne dostaneme výsledok. Hľadané kombinačné číslo je $\binom{16}{11}$.

$$\begin{aligned}\binom{10}{10}&+\binom{11}{10}+\binom{12}{10}+\binom{13}{10}+\binom{14}{10}+\binom{15}{10}\\ &=\binom{11}{11}+\binom{11}{10}+\binom{12}{10}+\binom{13}{10}+\binom{14}{10}+\binom{15}{10}\\ &=\binom{12}{11}+\binom{12}{10}+\binom{13}{10}+\binom{14}{10}+\binom{15}{10}=\binom{13}{11}+\binom{13}{10}+\binom{14}{10}+\binom{15}{10}\\ &=\binom{14}{11}+\binom{14}{10}+\binom{15}{10}=\binom{15}{11}+\binom{15}{10}=\binom{16}{11}\end{aligned}$$

3.3 Variácie

Definícia: Variácia k-tej triedy z n prvkov je každá usporiadaná k-tica rôznych prvkov, vybraných z n-prvkovej množiny. V k-tici záleží na poradí prvkov. V k-tici sa ani jeden z prvkov neopakuje. Počet všetkých variácií k-tej triedy z n-prvkov označujeme symbolom $V(k,n)$.
Zdroj: http://www.priklady.eu/sk/Riesene-priklady-matematika/Kombinatorika/Variacie.alej

Variácie k-tej triedy z n prvkov sú teda také usporiadané k-tice prvkov, ktoré sa odlišujú buď jednotlivými prvkami alebo ich usporiadaním. To znamená, že každé dve skupiny, ktoré sa líšia len poradím prvkov v skupine, považujeme za rôzne. (Huťka, V., 1994, str. 50)

Vzorec: $V(k,n)=\frac{n!}{(n-k)!}$

Vypočítajte:

1. **a) Koľko rôznych prirodzených štvorciferných čísel s rôznymi číslicami možno zostaviť z číslic 1, 2, 3, 5, 8?**
   b) Koľko z nich je deliteľných 5?
   c) Koľko z nich je nepárnych?

Riešenie:

a) Uvažujeme o množine $M = \{1, 2, 3, 5, 8\}$, ktorá má n = 5. Pretože pri číslach záleží na poradí číslic, z ktorých sa skladajú, štvorciferné čísla utvorené z prvkov množiny M utvárajú variácie 4. triedy z 5 prvkov. Ich počet je $V(4,5)$.
Hľadaný počet teda dostaneme: $V(4,5) = \frac{5!}{(5-4)!} = 120$.

b) Keďže chceme utvoriť štvorciferné čísla deliteľné číslom 5, tak si musíme stanoviť kritérium deliteľnosti čísla 5. Číslo je deliteľné piatimi, ak má na mieste jednotiek číslicu 0 alebo 5. Z našej množiny M si vyberieme 5, ktorá zaujme už pozíciu na mieste jednotiek. Číslicu 5 nebudeme môcť použiť na inú pozíciu, keďže sa číslice v zápise nemôžu opakovať.
_ _ _ 5
Počet štvorciferných čísel deliteľných 5: $V(3,4) = \frac{4!}{(4-3)!} = 24$

c) Hľadáme štvorciferné nepárne čísla tzn., že na mieste jednotiek môžeme postupne vybrať číslicu 1, 3, 5. V tomto prípade môžu nastať len tieto možnosti:
_ _ _ 1
_ _ _ 3
_ _ _5
počet nepárnych čísel: $V(3,4) = \frac{4!}{(4-3)!} = 24$ a keďže nepárnych čísel máme 3 (1,3,5), tak len výsledok prenásobíme 3, t.j. 24.3 =72 je hľadaný počet nepárnych štvorciferných čísel.

2. a) Koľko rôznych prirodzených päťciferných čísiel s rôznymi ciframi môžeme zostaviť z cifier 0, 2, 4, 6, 7, 8, 9?
b) Koľko z nich je deliteľných 4?
c) Koľko z nich je párnych?

Riešenie:

a) Uvažujeme o množine $M = \{0, 2, 4, 6, 7, 8, 9\}$, ktorá má n = 7. Pretože pri číslach záleží na poradí číslic, z ktorých sa skladajú, päťciferné čísla utvorené z prvkov množiny M utvárajú variácie 5. triedy zo 7 prvkov. Ich počet je $V(5,7)$. Ale tie variácie 5. triedy, v ktorých je na 1. mieste číslica 0, nedávajú päťciferné číslo. Určíme ich počet. Ak z každej päťprvkovej skupiny, ktorá má na 1. mieste číslicu 0, vynecháme 1. miesto, dostaneme štvorprvkovú skupinu zo 6 prvkov $\{ 2, 4, 6, 7, 8, 9\}$. Tie utvárajú variácie 4. triedy zo 6 prvkov, ich počet je $V(4,6)$.
Počet rôznych prirodzených päťciferných čísel je:
$V(5,7) - V(4,6) = \frac{7!}{(7-5)!} - \frac{6!}{(6-4)!} = \frac{7!}{2!} - \frac{6!}{2!} = 4320$

b) Na začiatku si určíme kritérium deliteľnosti čísla 4. Číslo je deliteľné štyrmi, ak je jeho posledné dvojčíslie 00 alebo deliteľné štyrmi.
Hľadáme čísla, ktoré končia ciframi: 04, 08, 20, 24, 28, 40, 48, 60, 64, 68, 72, 76, 80, 84, 92 a 96. Pre tieto koncové čísla platí:
_ _ _ 04 $V(3,5) = \frac{5!}{(5-3)!} = \frac{5!}{2!} = 60$
_ _ _ 08 $V(3,5) = \frac{5!}{(5-3)!} = \frac{5!}{2!} = 60$
_ _ _ 20 $V(3,5) = \frac{5!}{(5-3)!} = \frac{5!}{2!} = 60$
_ _ _ 24 $V(3,5) - V(2,4) = \frac{5!}{(5-3)!} - \frac{4!}{(4-2)!} = \frac{5!}{2!} - \frac{4!}{2!} = 60 - 12 = 48$

(Opäť nesmieme zabudnúť na odčítanie všetkých päťciferných čísel, ktoré začínajú číslicou 0)!!!

_ _ _ 28 $V(3,5) - V(2,4) = \frac{5!}{(5-3)!} - \frac{4!}{(4-2)!} = \frac{5!}{2!} - \frac{4!}{2!} = 60 - 12 = 48$

_ _ _ 40 $V(3,5) = \frac{5!}{(5-3)!} = \frac{5!}{2!} = 60$

_ _ _ 48 $V(3,5) - V(2,4) = \frac{5!}{(5-3)!} - \frac{4!}{(4-2)!} = \frac{5!}{2!} - \frac{4!}{2!} = 60 - 12 = 48$

_ _ _ 60 $V(3,5) = \frac{5!}{(5-3)!} = \frac{5!}{2!} = 60$

_ _ _ 64 $V(3,5) - V(2,4) = \frac{5!}{(5-3)!} - \frac{4!}{(4-2)!} = \frac{5!}{2!} - \frac{4!}{2!} = 60 - 12 = 48$

_ _ _ 68 $V(3,5) - V(2,4) = \frac{5!}{(5-3)!} - \frac{4!}{(4-2)!} = \frac{5!}{2!} - \frac{4!}{2!} = 60 - 12 = 48$

_ _ _ 72 $V(3,5) - V(2,4) = \frac{5!}{(5-3)!} - \frac{4!}{(4-2)!} = \frac{5!}{2!} - \frac{4!}{2!} = 60 - 12 = 48$

_ _ _ 76 $V(3,5) - V(2,4) = \frac{5!}{(5-3)!} - \frac{4!}{(4-2)!} = \frac{5!}{2!} - \frac{4!}{2!} = 60 - 12 = 48$

_ _ _ 80 $V(3,5) = \frac{5!}{(5-3)!} = \frac{5!}{2!} = 60$

_ _ _ 84 $V(3,5) - V(2,4) = \frac{5!}{(5-3)!} - \frac{4!}{(4-2)!} = \frac{5!}{2!} - \frac{4!}{2!} = 60 - 12 = 48$

_ _ _ 92 $V(3,5) - V(2,4) = \frac{5!}{(5-3)!} - \frac{4!}{(4-2)!} = \frac{5!}{2!} - \frac{4!}{2!} = 60 - 12 = 48$

_ _ _ 96 $V(3,5) - V(2,4) = \frac{5!}{(5-3)!} - \frac{4!}{(4-2)!} = \frac{5!}{2!} - \frac{4!}{2!} = 60 - 12 = 48$

Spolu: $6.V(3,5) + 10.[V(3,5) - V(2,4)] = 840$

c) počet päťciferných párnych:

Hľadáme čísla, ktoré končia ciframi: 0, 2, 4, 6 alebo 8. Pre tieto čísla platí:

_ _ _ _0 $V(4,6) = \frac{6!}{(6-4)!} = \frac{6!}{2!} = 360$

_ _ _ _ 2 $V(4,6) - V(3,5) = \frac{6!}{(6-4)!} - \frac{5!}{(5-3)!} = \frac{6!}{2!} - \frac{5!}{2!} = 360 - 60 = 300$

(Opäť nesmieme zabudnúť na odčítanie všetkých päťciferných párnych čísel, ktoré začínajú číslicou 0) !!!

_ _ _ _ 4 $V(4,6) - V(3,5) = \frac{6!}{(6-4)!} - \frac{5!}{(5-3)!} = \frac{6!}{2!} - \frac{5!}{2!} = 360 - 60 = 300$

_ _ _ _ 6 $V(4,6) - V(3,5) = \frac{6!}{(6-4)!} - \frac{5!}{(5-3)!} = \frac{6!}{2!} - \frac{5!}{2!} = 360 - 60 = 300$

_ _ _ _ 8 $V(4,6) - V(3,5) = \frac{6!}{(6-4)!} - \frac{5!}{(5-3)!} = \frac{6!}{2!} - \frac{5!}{2!} = 360 - 60 = 300$

Spolu: $V(4,6) + 4.[V(4,6) - V(3,5)] = 1560$

3. Určte počet všetkých prirodzených čísiel väčších než 2 000, v ktorých zápisoch sa vyskytujú cifry 1, 2, 4, 6, 8, a to každá najviac jedenkrát?

Riešenie:
Uvažujeme o množine $M = \{1, 2, 4, 6, 8\}$, ktorá má n = 5 prvkov. Pretože pri číslach záleží na poradí číslic, z ktorých sa skladajú, štvorciferné čísla utvorené z prvkov množiny M utvárajú variácie 4. triedy z 5 prvkov, ale majú byť väčšie ako 2 000 tzn., že na prvom mieste môžu byť číslice 2, 4, 6, 8. Preto ich počet je $V(3,4)$.

2 _ _ _ $V(3,4) = \frac{4!}{(4-3)!} = \frac{4!}{1!} = 24$

4 _ _ _ $V(3,4) = \frac{4!}{(4-3)!} = \frac{4!}{1!} = 24$

6 _ _ _ $V(3,4) = \frac{4!}{(4-3)!} = \frac{4!}{1!} = 24$

8 _ _ _ $V(3,4) = \frac{4!}{(4-3)!} = \frac{4!}{1!} = 24$

A keďže množina M je 5 prvková množina, najväčšie číslo, ktoré z tejto množiny M môžeme vytvoriť bude päťciferné číslo. Pre hľadaný počet teda platí:

_ _ _ _ _ $V(5,5) = \frac{5!}{(5-5)!} = \frac{5!}{0!} = 120$

Spolu: $4.V(3,4) + V(5,5) = 4.24 + 120 = 216$

4. **Určte počet všetkých prirodzených čísiel väčších než 300 a menších než 5000, v ktorých zápisoch sa vyskytujú cifry 2, 3, 4, 7, 8, a to každá najviac raz?**

Riešenie:

Uvažujeme o množine $M = \{2, 3, 4, 7, 8\}$, ktorá má n = 5 prvkov. Pretože pri číslach záleží na poradí číslic, z ktorých sa skladajú vytvárame variácie. Najskôr určíme čísla väčšie ako 300, kde na 1. miesto môžeme použiť číslicu 3, 4, 7, 8. Preto ich počet je $V(2,4)$.

3 _ _

4 _ _

7 _ _

8 _ _

$$V(2,4) = \frac{4!}{(4-2)!} = \frac{24}{2} = 12$$

A keďže na začiatku môže byť 2, 4, 7, 8 t.j. 4 možnosti 4.12=60 možností.

$$4 \cdot V_2(4) + 3 \cdot V_3(4) = 4 \cdot \frac{4!}{2!} + 3 \cdot \frac{4!}{1!} = \underline{120}$$

5. **V triede je 36 žiakov. Koľkými spôsobmi môžeme zvoliť 4-členný výbor, ak záleží na tom, kto bude mať vo výbore akú funkciu. Ide o funkciu predsedu, podpredsedu, pokladníka a nástenkára.**

Riešenie:

Pretože v každej zvolenej štvorici záleží na tom, ktorá zo zvolených osôb je predsedom, ktorá podpredsedom, ktorá pokladníkom a ktorá nástenkárom, ide o usporiadané štvorice, pretože každá osoba z danej triedy je v tejto štvorici najviac raz, sú tieto usporiadané štvorice variácie štvrtej triedy z tridsiatichšiestich prvkov. Pre ich počet $V(4,36) = \frac{36!}{(36-4)!} = \frac{36!}{32!} = 1\,413\,720$.

6. **Na bežeckej dráhe beží 12 súťažiacich. Za predpokladu, že každú z medailí získa práve jeden súťažiaci, vypočítajte, koľko je možností na rozdelenie zlatej, striebornej a bronzovej medaili medzi súťažiacich.**

Riešenie:

V tomto zadaní je presne ten istý postup ako v predošlom príklade. Každému z 12 súťažiacich, ktorí sa postavia na štart ide o medailu. Teda ide o variácie tretej triedy z dvanástich prvkov. Pre ich počet platí:

$V(3,12) = \frac{12!}{(12-3)!} = \frac{12!}{9!} = 1\,320.$

7. **V triede 1. O sa vyučuje 11 rôznych predmetov. Koľkými spôsobmi môžeme zostaviť rozvrh na jeden deň, ak sa v tento deň vyučuje 6 rôznych predmetov?**

Riešenie:
Budeme vyberať 6 predmetov z 11 predmetov a záleží na ich poradí, preto použijeme variácie šiestej triedy z 12 prvkov. Pre ich počet platí:
$V(6,11) = \frac{11!}{(11-6)!} = \frac{11!}{5!} = 332\,640.$

8. **Z koľkých prvkov môžeme vytvoriť 992 variácií druhej triedy bez opakovania?**

Riešenie:
Využijeme základný vzťah pre počet variácií $V(k,n) = \frac{n!}{(n-k)!}$.
$V(2,n) = 992$
Upravíme zlomok s faktoriálom.
$$\frac{n!}{(n-2)!} = 992$$
$$\frac{n.(n-1).(n-2)!}{(n-2)!} = 992$$
Po vykrátení dostávame:
$n.(n-1) = 992$
Po roznásobení dostaneme kvadratickú rovnicu.
$n^2 - n - 992 = 0$
Do vzorca pre diskriminant kvadratickej rovnice dosadíme hodnoty pre a, b, c a dopočítame korene kvadratickej rovnice $n_{1,2}$.
$D = b^2 - 4.a.c$
$D = (-1)^2 - 4.1.(-992) = 1 + 3968 = 3969$
$$n_{1,2} = \frac{-b \mp \sqrt{D}}{2.a} = \frac{1 \mp 63}{2} = 32\ a - 31$$
Záporný koreň nás nezaujíma, keďže počet prvkov nemôže byť záporné číslo.
Nesmieme zabudnúť na určenie podmienok, $n \geq 0, n \geq 2$, teda $n \in \langle 2, \infty)$.
992 variácií druhej triedy bez opakovania môžeme vytvoriť z 32 prvkov.

V ďalších dvoch rovniciach využijeme postup ako v príklade 8.
Žiakom musíme pripomenúť nasledujúce kroky:

a) vychádzame zo základného vzorca pre počet variácií $V(k,n) = \frac{n!}{(n-k)!}$,
b) na konci príkladu potrebujeme zapísať podmienky riešiteľnosti,
c) a tým si overíme, či hľadaný výsledok nám patrí do podmienok.

9. **Ak sa zväčší počet prvkov o 5, zväčší sa počet variácií druhej triedy bez opakovania vytvorených z týchto prvkov o 1170. Určte pôvodný počet prvkov.**

Riešenie:
$V(2, n+5) = V(2, n) + 1170$
$\frac{(n+5)!}{(n+5-2)!} = \frac{n!}{(n-2)!} + 1170$
$\frac{(n+5)!}{(n+3)!} = \frac{n!}{(n-2)!} + 1170$
$\frac{(n+5).(n+4).(n+3)!}{(n+3)!} = \frac{(n).(n-1).(n-2)!}{(n-2)!} + 1170$
$(n+5).(n+4) = (n).(n-1) + 1170$
$n^2 + 5n + 4n + 20 = n^2 - n + 1170$
$10n = 1150$
$n = 115$
Opäť nesmieme zabudnúť na určenie podmienok $n \geq -5, n \geq -3, n \geq 0, n \geq 2$. Teda $n \in \langle 2, \infty)$.
Pôvodný počet prvkov bude 115.

10. Ak sa zmenší počet prvkov o 27, zmenší sa počet variácií druhej triedy bez opakovania vytvorených z týchto prvkov desaťkrát. Určte pôvodný počet prvkov.

Riešenie:

$V(2, n-27) = \frac{V(2, n)}{10}$
$\frac{(n-27)!}{(n-27-2)!\,2!} = \frac{1}{10}.\frac{n!}{(n-2)!\,2!}$

$\frac{(n-27).(n-28)n-29)!}{(n-29)!\,2!} = \frac{1}{10}.\frac{n.(n-1).(n-2)!}{(n-2)!\,2!}$
$(n-27).(n-28) = \frac{1}{10}.n.(n-1)$
$n^2 - 27n - 28n + 756 = \frac{1}{10}.(n^2 - n)$
$10n^2 - 270n - 280n + 7560 = n^2 - n$
$9n^2 - 549n + 7560 = 0$

$D = b^2 - 4.a.c$
$D = (-549)^2 - 4.9.7560 = 301\,401 - 272\,160 = 29\,241$
$n_{1,2} = \frac{-b \mp \sqrt{D}}{2.a} = \frac{549 \mp 171}{18} = 21 \quad a \quad 40$
Keďže nesmieme zabudnúť na určenie podmienok, kde $n \geq 27, n \geq 29, n \geq 0, n \geq 2$, teda $n \epsilon \langle 29, \infty)$.
Pôvodný počet prvkov je 40.

Nasledujúcich 25 cvičení je na domáce precvičenie žiakov. Po výklade učiva na konci vyučovacej hodiny im z daných cvičení vyberieme príklady, na ktorých si precvičia a upevnia vedomosti z hodiny.

Cvičenie:

1. Koľko existuje štvorciferných prirodzených čísel, ktoré majú všetky číslice navzájom rôzne?
2. Koľko trojciferných prirodzených čísel s rôznymi ciframi možno vôbec vytvoriť z cifier 0, 1, 2, 3, 5, 9, aby boli párne?
3. Koľko jednociferných až štvorciferných čísel s rôznymi ciframi možno vytvoriť z cifier 0, 2, 4, 8?
4. Z koľkých prvkom možno vytvoriť päťkrát toľko variácií tretej triedy než variácií druhej triedy?
5. Koľko prirodzených čísiel väčších ako 17 môžeme vytvoriť z číslic 0, 1, 2, 3, 7, ak sa žiadne číslo neopakuje?
6. Koľko päťciferných čísel môžeme napísať z číslic 0, 3, 4, 5, 7, aby boli deliteľné

a) 2 b) 10?

7. Koľko rôznych štvorciferných čísel možno napísať použitím cifier 0, 1, 6, 7, 9 bez opakovania cifier?
8. Koľko rôznych signálov možno dať vyťahovaním piatich rôznych vlajok (jeden signál je určený 5 vlajkami).?
9. Ak sa počet prvkov zväčší o dva, zväčší sa počet variácií tretej triedy bez opakovania o 384. Koľko je prvkov?
10. Z koľkých prvkov možno vytvoriť 5 040 variácií štvrtej triedy bez opakovania?
11. Koľkými spôsobmi môže 38 členov organizácie zvoliť 4-členný výbor, ak záleží na tom, kto bude mať vo výbore akú funkciu?
12. Vo vrecku je 7 rovnakých lístkov označených číslami 1 až 7. Koľkými spôsobmi môžeme postupne s prihliadnutím na poradie vybrať tri z nich, ak sa vybrané lístky do vrecka nevracajú?
13. Koľko rôznych umiestnení môže byť na prvých troch miestach na hokejových majstrovstvách sveta, ak na nich hrá 8 mužstiev?
14. Koľko rôznych telefónnych staníc možno zapojiť, ak sú všetky telefónne čísla šesťmiestne a ani jedno z nich sa nezačína nulou, a zároveň číslice sa neopakujú?
15. Z koľkých prvkov možno vytvoriť 600 variácií druhej triedy bez opakovania?
16. Koľko je všetkých možných trojciferných prirodzených čísel, ak cifry sa neopakujú?
17. Koľko prirodzených čísel menších ako 200 možno zostaviť z číslic 1, 2, 3, 4, ak sa žiadna číslica neopakuje?
18. Z koľkých prvkov možno vytvoriť 420 variácií 2.triedy?
19. Určte počet všetkých prirodzených čísel väčších ako 2000, v zápisoch ktorých sa vyskytujú cifry 1,2,4,6,8, a to každá najviac raz.
20. Koľko prirodzených čísel väčších ako 300 možno napísať pomocou číslic 1,2,3,4, ak sa žiadna číslica neopakuje?
21. Ak sa zmenší počet prvkov o 27, zmenší sa počet variácií druhej triedy bez opakovania vytvorených z týchto prvkov 10 krát. Určte aký je pôvodný počet prvkov?
22. Koľko prirodzených čísel menších ako 7 000 a zároveň väčších ako 600 možno napísať pomocou číslic 4,5,6,7,8,9 ak žiadna číslica sa neopakuje?
23. Koľko všetkých prirodzených čísel môžeme vytvoriť z cifier 0,1,2,3, ak sa žiadna číslica neopakuje?
24. Riešte rovnicu: $V(2, n) = 210$.
25. Ak sa zväčší počet prvkov o 5, zväčší sa počet variácií druhej triedy bez opakovania vytvorených z týchto prvkov o 1 170. Určte pôvodný počet prvkov.

3.4 Kombinácie

Definícia: Kombinácia k-tej triedy bez opakovania z n prvkov je každá k-tica, v ktorej sa každý prvok vyskytuje najviac raz, a na poradí prvkov nám nezáleží.
Zdroj: http://sis.science.upjs.sk/matematika/kniznica_vp/kombinat/kbezopak.htm

Počet všetkých kombinácií k-tej triedy z n prvkov označujeme symbolom $\mathrm{C}(k,n)$alebo $\binom{n}{k}$ čítame „en nad ká" a nazývame kombinačné číslo. (Huťka, 1994, str. 61)

Vzorec: $\mathrm{C}(k,n) = \frac{n!}{(n-k)!.k!}$.

Vypočítajte:

1. **Koľkými spôsobmi možno z desiatich žiakov vybrať trojčlenné družstvo?** Porovnajte to s príkladom 5 z kapitoly 2.7

Riešenie:
V trojiciach, ktoré z daných osôb vyberáme, nezáleží na usporiadaní a každá osoba je v tejto trojici najviac raz. Ide teda o trojprvkové podmnožiny desaťprvkovej množiny, t.j. o kombinácie tretej triedy z desiatich prvkov. Ich počet je

$C(3,10) = \frac{10!}{(10-3)!.3!} = 120.$
Trojčlenné družstvo môžeme vytvoriť z desiatich žiakov 12O spôsobmi.

2. **Koľko priamok určuje desať rôznych bodov v rovine, z ktorých**
   a) **žiadne tri neležia na jednej priamke,**
   b) **práve 6 leží na jednej priamke?**

Riešenie:

Pretože každá priamka je určená dvoma rôznymi bodmi, na usporiadaní ktorých nezáleží, ide o kombinácie druhej triedy.

a) Keď nijaké tri z desiatich bodov neležia na priamke, potom každá kombinácia druhej triedy z týchto desiatich bodov určuje jednu priamku, takže týchto priamok je
$$C(2{,}10) = \binom{10}{2} = \frac{10!}{(10-2)!.2!} = 45$$
b) Keď práve šesť z daných desiatich bodov ležia na priamke, potom všetky kombinácie druhej triedy z týchto šiestich bodov určujú nie $C(2,6)$ priamok, ale jedinú priamku. Počet všetkých priamok v tomto prípade je
$$C(2{,}10) - C(2,6) + 1 = \binom{10}{2} - \binom{6}{2} + 1 = \frac{10!}{(10-2)!.2!} - \frac{6!}{(6-2)!.2!} + 1$$
$$= 45 - 15 + 1 = 31$$

3. **V priestore je daných 15 rôznych bodov. Koľko rovín tieto bodu určujú, ak**
   a) **žiadne tri neležia v jednej rovine,**
   b) **práve 8 leží v jednej rovine?**

Riešenie:

Ten istý postup ako v zadaní 2. Pretože každá rovina je určená troma rôznymi bodmi, na usporiadaní ktorých nezáleží, ide o kombinácie tretej triedy.

a) Keď nijaké tri z pätnástich rôznych bodov neležia v jednej rovine, potom každá kombinácia tretej triedy z týchto pätnástich bodov určuje jednu rovinu, takže týchto rovín je $C(3,15) = \binom{15}{3} = \frac{15!}{(15-3)!.3!} = 455$

b) Keď práve osem z daných pätnástich rôznych bodov ležia v jednej rovine, potom každá kombinácia tretej triedy z týchto ôsmich bodov určujú nie $C(3,8)$ rovín, ale jedinú rovinu. Počet všetkých rovín v tomto prípade je

$$C(3,15) - C(3,8) + 1 = \binom{15}{3} - \binom{8}{3} + 1 = \frac{15!}{(15-3)!.3!} - \frac{8!}{(8-3)!.3!} + 1$$
$$= 455 - 56 + 1 = 400$$

4. V triede 3. O je 30 žiakov. Koľkými spôsobmi môžeme vybrať štyroch na vyskúšanie?

Riešenie:

Vo štvoriciach, ktoré z daných osôb vyberáme, nezáleží na usporiadaní a každá osoba je v tejto štvorici najviac raz. Ide teda o štvorprvkové podmnožiny tridsaťprvkovej množiny, t.j. ide o kombinácie štvrtej triedy z tridsiatich prvkov. Ich počet je

$$C(4,30) = \binom{30}{4} = \frac{30!}{(30-4)!.4!} = 27\,405$$

Máme 27 405 možností k dispozícií, ak chceme vyskúšať štyroch žiakov v triede 3.O.

5. V koľkých bodoch sa pretnú priamky ležiace v tej istej rovine, keď žiadne dve nie sú rovnobežné?

Riešenie:

$$C(2,4) = \binom{4}{2} = \frac{4!}{(4-2)!.2!} = 6$$

Priamky ležiace v tej istej rovine, sa pretnú v 6 bodoch.

6. Päť priateľov sa lúči. Každý každému podá ruku. Koľko podarí rúk bolo?

Riešenie:

Keďže pri podaní rúk si môžu naraz podávať ruky len dve osoby a nezáleží na usporiadaní, tak tu máme kombinácie druhej triedy z piatich prvkov. Ich počet je

$$C(2,5) = \binom{5}{2} = \frac{5!}{(5-2)!.2!} = 10$$

7. Na stužkovej slávnosti je 25 osôb. Koľko štrngnutí sa spolu ozve, ak si každý s každým štrngne? (Nijaké dve štrngnutia nesplynuli).

Riešenie:

Podobný príklad ako v zadaní 6.

$$C(2,25) = \binom{25}{2} = \frac{25!}{(25-2)!\,.2!} = 300$$

8. Koľkými spôsobmi môžeme rozdeliť 12 hráčov na dve šesťčlenné družstvá?

Riešenie:

Vybrané šesťčlenné družstvo je zložené z rôznych osôb a nezáleží v nich na usporiadaní.

Zo všetkých 12 hráčov môžeme utvoriť

$$C(6,12) = \binom{12}{6} = \frac{12!}{(12-6)!\,.6!} = 924$$

9. Koľkými spôsobmi môžeme zo 14 dievčat a 16 chlapcov vytvoriť dve šesťčlenné volejbalové družstvá tak, aby v každom družstve boli dve dievčatá a štyria chlapci?

Riešenie:

Keďže do šesťčlenného družstvá vyberáme dve dievčatá, tak tie môžeme vybrať len zo 14 dievčat, ktoré máme k dispozícií, pričom nám nezáleží ktoré dievča vyberieme do družstva. To isté urobíme aj s chlapcami, ich potrebujeme štyroch, pričom vyberáme zo 16 chlapcov, a tiež nám nezáleží, ktorý chlapec bude v družstve. Pre počet všetkých možností dostaneme

$$C(2,14).\,C(4,16) = \binom{14}{2}.\binom{16}{4} = \frac{14!}{(14-2)!\,.2!}\ .\ \frac{16!}{(16-4)!\,.4!} = 91\,.1820$$
$$= 165\ 620$$

10. V škatuli je 20 sponiek, z ktorých sú práve tri chybné. Koľkými spôsobmi môžeme vybrať 5 sponiek tak, aby

a) žiadna nebola chybná,
b) práve jedna bola chybná,
c) najviac jedna bola chybná,
d) práve dve boli chybné,
e) najviac dve boli chybné,
f) aspoň dve boli chybné?

Riešenie:

a) Pretože pri výbere sponiek nezáleží na ich usporiadaní, pri riešení použijeme kombinácie. V škatuli máme 20 sponiek, z nich je 17 dobrých a 3 chybné. Keďže chceme vybrať 5 sponiek, z ktorých nemá byť žiadna chybná tzn., že vyberáme 5 sponiek len z dobrých a tých je 17 sponiek. Ich počet je

$$C(5,17) = \binom{17}{5} = \frac{17!}{(17-5)!\,.5!} = 6\ 188$$

b) Keďže opäť z 5 sponiek chceme vybrať, práve jednu chybnú sponku tzn., že 1 bude chybná a zvyšné 4 budú dobré. Ich počet bude
$C(4{,}17).C(1{,}3) = \binom{17}{4}.\binom{3}{1} = \frac{17!}{(17-4)!.4!}.\frac{3!}{(3-1)!.1!} = 2\,380.3 = 7\,140$

c) Najviac jedna bola chybná tzn., že môže nastať situácia buď všetky vyberieme dobré, alebo z 5 sponiek vyberieme 4 dobré a 1 chybnú sponku. Dostaneme
$C(5{,}17) + C(4{,}17).C(1{,}3) = 6188 + 7\,140 = 13\,328$

d) Práve dve chybné tzn., že tu nastane len situácia 2 chybné a 3 dobré. Ich počet bude $C(3{,}17).C(2{,}3) = \binom{17}{3}.\binom{3}{2} = \frac{17!}{(17-3)!.3!}.\frac{3!}{(3-2)!.2!} = 680.3 = 2\,040$

e) Najviac dve boli chybné tzn., že buď vyberieme 2 chybné a 3 dobré, alebo 1 chybnú a 4 dobré, alebo všetkých 5 sponiek bude dobrých. Ich počet bude

$$C(3{,}17).C(2{,}3) + C(4{,}17).C(1{,}3) + C(5{,}17) = 2\,040 + 7\,140 + 6188 = 15\,368$$

f) Aspoň dve chybné, tzn., že môže vzniknúť situácia 2 chybné a 3 dobré, alebo 3 chybné a2 dobré. Iná možnosť nemôže byť, keďže k dispozícií máme len 3 zlé sponky.

$$C(3{,}17).C(2{,}3) + C(2{,}17).C(3{,}3) = 2\,040 + \binom{17}{2}.\binom{3}{3} = 2\,040 + 136.1 = 2\,176$$

11. Tréner hokejového mužstva má k dispozícii 3 brankárov, 7 obrancov a 12 útočníkov. Koľko rôznych šestíc hráčov môže poslať hrať, keď na ľade je jeden brankár, dvaja obrancovia a traja útočníci (nerozlišujeme na pravých, ľavých atď.)?

Riešenie:

Ten istý postup ako v príklade 9.

$$C(1{,}3).C(3{,}12).\ C(2{,}7) = \binom{3}{1}.\binom{12}{3}.\binom{7}{2} = 3\ .\ \ 220\ \ .\ \ 21 = 13\,860$$

Tréner môže na ľad poslať 13 860 šestíc.

V nasledujúcich troch príkladoch budeme využívať základný vzťah pre počet kombinácií $\mathrm{C}(k,n) = \frac{n!}{(n-k)!.k!}$. A postup riešenia príkladu zvolíme presne ten istý ako v cvičení 8 z kapitoly 2.7. Opäť nesmieme zabudnúť žiakov upozorniť, že na konci príkladu potrebujú určiť podmienky riešenia.

12. Z koľkých prvkov môžeme vytvoriť 990 kombinácií druhej triedy bez opakovania?

Riešenie:
$C(2,n) = 990$
$$\frac{n!}{(n-2)!.2!} = 990$$
$$\frac{n.(n-1).(n-2)!}{(n-2)!.2!} = 990$$
$n.(n-1) = 1\,980$
$n^2 - n - 1\,980 = 0$

$D = b^2 - 4.a.c$
$D = (-1)^2 - 4.1.(-1980) = 1 + 7920 = 7921$
$$n_{1,2} = \frac{-b \mp \sqrt{D}}{2.a} = \frac{1 \mp 89}{2} = 45\ a - 44$$

Nesmieme zabudnúť na určenie podmienok, $n \geq 0, n \geq 2$, teda $n \in \langle 2, \infty)$.
Záporný koreň nás nezaujíma, keďže počet prvkov nemôže byť záporné číslo.
Môžeme vytvoriť 990 kombinácií druhej triedy bez opakovania zo 45 prvkov.

13. Ak sa zväčší počet prvkov o 4, zväčší sa počet kombinácií druhej triedy bez opakovania vytvorených z týchto prvkov o 50. Určte pôvodný počet prvkov.

Riešenie:

$C(2, n+4) = C(2, n) + 50$
$$\frac{(n+4)!}{(n+4-2)!.2!} = \frac{n!}{(n-2)!.2!} + 50$$
$$\frac{(n+4)!}{(n+2)!.2!} = \frac{n!}{(n-2)!.2!} + 50$$
$$\frac{(n+4).(n+3).(n+2)!}{(n+2)!.2!} = \frac{n.(n-1).(n-2)!}{(n-2)!.2!} + 50$$
$(n+4).(n+3) = n.(n-1) + 100$
$n^2 + 4n + 3n + 12 = n^2 - n + 100$
$8n = 88$
$n = 11$
Nesmieme zabudnúť na určenie podmienok, $n \geq -4, n \geq -2, n \geq 0, n \geq 2$ teda $n \in \langle 2, \infty)$.
Výsledok rovnice je číslo 11.
Pôvodný počet prvkov bude 11.

Nasledujúcich 20 cvičení je na domáce precvičenie žiakov. Na konci vyučovacej hodiny im z daných cvičení vyberieme príklady, na ktorých si precvičia a upevnia vedomosti z hodiny.

Cvičenie:

1. Sedem priateľov sa dohodne, že každý každému pošle pohľadnicu z dovolenky. Koľko pohľadníc bolo odoslaných?
2. Z koľkých prvkov utvoríme 21 kombinácií druhej triedy bez opakovania?
3. Volejbalové mužstvo má 4 hráčov na príjem podania, 8 nahrávačov a 7 smečiarov. Koľko šesťčlenných zostáv môže vybrať tréner, ak v nich majú byť vždy dvaja hráči z jednotlivých činností?
4. V novinovom stánku majú 20 rôznych druhov novín a časopisov. Určte, koľkými spôsobmi si z nich môžeme kúpiť 8 rôznych druhov novín a časopisov?
5. Z koľkých prvkov možno vytvoriť 136 kombinácií druhej triedy bez opakovania prvkov?
6. Z koľkých prvkov množiny môžeme vytvoriť šesťkrát viac kombinácií štvrtej triedy bez opakovania ako kombinácií druhej triedy bez opakovania?
7. V rovine je 12 ľubovoľných bodov. Koľko najviac kružníc je nimi určených?

8. Vo vrecku je 15 červených a 20 modrých kartičiek. Koľkými spôsobmi možno vytiahnuť
a) 5 červených,
b) 8 modrých,
c) 4 červené a 7 modré kartičky, keď vytiahneme kartičky súčasne?
9. Koľko prvkov dáva 55 kombinácií druhej triedy bez opakovania?
10. V priestore je daných 18 bodov, z ktorých nijaké 4 neležia v jednej rovine. Koľko štvorstenov určujú tieto body?
11. Koľko uhlopriečok je v pravidelnom 10-uholníku?
12. Koľkými spôsobmi možno vytiahnuť tri karty z 32 kárat, keď na ich poradí nezáleží?
13. Určte počet všetkých možných tanečných párov z 12 chlapcov a 11 dievčat.
14. V koľkých bodoch sa pretnú priamky ležiace v tej istej rovine, keď žiadne dve nie sú rovnobežné?
15. Koľkými spôsobmi môžeme zo skupiny 23 dievčat a 17 chlapcov vybrať šesticu v ktorej sú dve dievčatá a štyria chlapci?
16. Cestovné lístky dopravného podniku majú 9 očíslovaných okienok. Koľkými spôsobmi môžu byť nastavené navzájom rôzne kódy u označujúcich strojčekoch, ak sa 3 alebo 4 okienka?
17. Riešte rovnicu: $C(2, n) = 28$.
18. Na brigáde bolo 15 chlapcov a 20 dievčat. Koľko rôznych služieb možno určiť, ak sa majú skladať z 2 chlapcov a 1 dievčaťa?
19. Koľko prvkov dáva 105 kombinácií druhej triedy bez opakovania?
20. V škatuli je 11 výrobkov, z ktorých sú práve štyri chybné. Koľkými spôsobmi môžeme vybrať 5 výrobkov tak, aby
a) žiaden nebol chybný,
b) práve jeden bol chybný,
c) najviac jeden bol chybný,
d) práve dva boli chybné,
e) najviac dva boli chybné,
f) aspoň dva boli chybné,
g) práve tri boli chybné,
h) práve štyri boli chybné,
i) práve päť bolo chybných?

3.5 Permutácie

Definícia: Permutácia z *n* prvkov bez opakovania je každá variácia *n*-tej triedy z týchto n prvkov.
Zdroj : http://sis.science.upjs.sk/matematika/kniznica_vp/kombinat/pbezopak.htm

Vzorec: P(n) = n!

Permutácie z *n* prvkov sú teda také skupiny s *n* prvkami, ktoré sa odlišujú len usporiadaním prvkov v skupine. (Huťka, 1994, str. 52)
Počet všetkých permutácií z *n* prvkov označujeme symbolom P(n).

Vypočítajte:

1. **Koľkými spôsobmi môžeme postaviť 15 žiakov do radu pri nástupe na hodine telesnej výchovy?**

Riešenie:
Budeme uvažovať o množine $M = \{A, B, C, D, E, F, G, H, I, J, K, L, M, N, O, \}$. Všetky možné spôsoby usporiadania nástupu žiakov do radu na hodine telesnej výchovy budeme utvárať z tejto 15-prvkovej skupiny M. Ide o usporiadanie 15-prvkovej skupiny zostavenej z 15 prvkov množiny M. Ich počet sa rovná počtu permutácií z 15 prvkov, t.j. $P(15) = 15!$

V nasledujúcich troch zadaniach využijeme postup ako v príklade 1.

2. **Koľkými spôsobmi môžeme postaviť vedľa seba na poličku 10 rôznych slovenských kníh a 5 anglických tak, že najprv budú knihy anglické a vedľa nich knihy slovenské?**

Riešenie:
$P(5).P(10) = 5!.10! = 435\,456\,000$

3. **Koľkými spôsobmi môžeme rozmiestniť na poličke vedľa seba 11 rôznych kníh tak, že 4 knihy od toho istého autora budú stále vedľa seba v ľubovoľnom poradí?**

Riešenie:

Štyri knihy budeme pokladať za jeden prvok, rozmiestniť ich môžeme v ľubovoľnom poradí. Teda spolu máme rozmiestniť 8 kníh. Ide o usporiadanie 8-prvkovej skupiny z 8 prvkov. Ich počet sa rovná počtu permutácií z 8 prvkov, t.j. $P(8)$. Nesmieme zabudnúť, že 4 knihy od toho istého autora sme považovali za jeden celok, ktoré môžu meniť svoje poradie. Pre ich počet platí 4!.

$\boxed{\text{4 knihy}}$ _ _ _ _ _ _ _ kníh

Spolu dostávame:
$P(8).4! = 8!.4! = 40\,320\,.24 = 967\,680$

4. **Z koľkých prvkov možno utvoriť 479 001 600 permutácií?**

Riešenie:
Využijeme základný vzorec pre výpočet permutácií P(n) = n!.Dosadíme do vzorca.
$P(n) = 479\,001\,600$
A už len pomocou kalkulačky hľadáme faktoriál čísla, ktorý nám dáva 479 001 600 permutácií.
$n! = 479\,001\,600$
$n = 12$
Kde $n \geq 0, n \in \langle 0, \infty)$.

5. **Určte počet všetkých päťciferných prirodzených čísel, v dekadickom zápise ktorých je každá z číslic 0, 1, 2, 3, 4.**

Riešenie:
Pretože v každom uvedenom päťcifernom čísle má byť každá z piatich číslic, ide o počet všetkých permutácií z daných piatich prvkov, pričom ani jedna z týchto permutácií sa nesmie začínať nulou. Počet všetkých permutácií z daných piatich číslic je P(5)= 5!, počet všetkých permutácií z daných číslic, ktoré majú na prvom mieste nulu, je P(4) = 4!. Hľadaný počet všetkých päťciferných prirodzených čísel požadovanej vlastnosti je teda
$P(5) - P(4) = 5! - 4! = 120 - 24 = 96$

6. **Koľko permutácií môžeme vytvoriť z prvkov 1,3,5,6,7,8,9 tak, aby**
   a) **všetky sa začínali 3 a končili 5,**
   b) **prvky 3,5,6,9 boli stále vedľa seba v ľubovoľnom poradí?**

Riešenie:
a) 3 _ _ _ _ _ 5
$P(5) = 5! = 120$

Môžeme vytvoriť 120 permutácií, ak všetky budú začínať 3 a končiť 5.

b) $P(4).4! = 4!.4! = 24.24 = 576$

Môžeme vytvoriť 576 permutácií, ak prvky 3,5,6,9 budú stále vedľa seba v ľubovoľnom poradí.

7. **Ak zmenšíme počet prvkov o 2, zmenší sa počet permutácií 42-krát. Koľko bolo prvkov?**

Riešenie:

$$P(n-2) = \frac{P(n)}{42}$$
$$(n-2)! = \frac{(n)!}{42}$$
$$(n-2)! = \frac{(n)!}{42}$$
$$(n-2)! = \frac{(n).(n-1).(n-2)!}{42}$$
$$1 = \frac{(n).(n-1)}{42}$$
$$42 = n^2 - n$$
$$n^2 - n - 42 = 0$$

$$D = b^2 - 4.a.c$$
$$D = (-1)^2 - 4.1.(-42) = 1 + 168 = 169$$
$$n_{1,2} = \frac{-b \mp \sqrt{D}}{2.a} = \frac{1 \mp 13}{2} = -6 \quad a \quad 7$$

Hľadaný počet prvkov je 7.

Nasledujúcich 11 cvičení je na domáce precvičenie žiakov. Po prebratí učiva na konci hodiny im z daných cvičení vyberieme príklady, na ktorých si precvičia a upevnia vedomosti z hodiny.

Cvičenie:

1. Koľko permutácií možno utvoriť z prvkov 1,2,3,4,5,8 tak, aby
   a) všetky sa začínali 2 a končili 1,
   b) prvky 4,5,1 boli stále vedľa seba, ale v ľubovoľnom poradí?
2. V domácej knižnici na polici je 17 kníh, medzi nimi je 7-dielny román (7 kníh). Koľkokrát môžeme usporiadať knihy tak, aby všetkých sedem dielov románu bolo vždy vedľa seba v rovnakom usporiadaní?
3. Z koľkých prvkov možno utvoriť 362 880 permutácií?
4. Ak zväčšíme počet prvkov o dva, zväčší sa počet permutácií dvanásťkrát. Koľko bolo prvkov?
5. Šesť ruských a 5 slovenských kníh sa majú postaviť na poličku vedľa sebatak, aby boli zaradené najprv slovenské a potom ruské knihy. Koľkými spôsobmi to možno vykonať?
6. Ak sa počet prvkov zmenší o dva, zmenší sa počet permutácií vytvorený z týchto prvkov dvadsaťkrát. Koľko je prvkov?
7. Ak zväčšíme počet prvkov o dva, zmenší sa počet permutácií 42-krát. Koľko bolo prvkov?
8. Ak zväčšíme počet prvkov o dva, zväčší sa počet permutácií dvanásťkrát. Koľko bolo prvkov?
9. Koľko slov možno vytvoriť zo všetkých písmen slova BRATISLAVA?
10. Pätnásti svadobčania sa nemohli dohodnúť, kto kde bude stáť na svadobnej fotografii. Ženích navrhol, aby sa urobili všetky možné zostavy svadobčanov na fotografiách. Koľko fotografií treba urobiť?
11. Koľko rôznych päťciferných prirodzených čísel možno napísať pomocou číslic 1,2,3,4,5 ak:
    a) číslica sa v čísle použije len raz?
    b) koľko z napísaných čísel sa bude začínať číslicou 5?
    c) koľko z napísaných čísel bude párnych?

3.6 Variácie, kombinácie, permutácie s opakovaním

Definícia: Variácia k-tej triedy s opakovaním z n prvkov je každá usporiadaná k-prvková skupina zostavená iba z týchto n prvkov tak, že sa každý prvok môže ľubovoľne krát opakovať.

Zdroj: http://sk.wikipedia.org/wiki/Vari%C3%A1cia_%28kombinatorika%29

Počet možných variácií s opakovaním je: $V^{'}(k,n) = n^k$

Definícia: Kombinácie k-tej triedy z n prvkov (s opakovaním) je každá k-tica prvkov vybraných z n-prvkovej množiny (v k-tici nezáleží na poradí prvkov a môžu sa v nej prvky ľubovoľne opakovať).

$$C^{\prime}(k,n) = \binom{n+k-1}{k}$$

Zdroj: http://www.priklady.eu/sk/Riesene-priklady-matematika/Kombinatorika/Kombinacie.alej

Definícia: Vyskytujú sa vtedy, ak v základnej množine sa niektoré prvky vyskytujú niekoľkokrát. V tomto prípade platí vzorec: $P^{\prime}_{k1,k2,k3,\ldots,kn}(k)=\frac{k!}{k1!.k2!.k3!\ldots kn!}$, kde platí $k_1 + k_2 + k_3 + \cdots k_n = k$

Zdroj: http://www.oskole.sk/?id_cat=2&clanok=16

Vypočítajte:

1. **Koľko značiek Morseovej abecedy môžeme zostaviť z bodiek a čiarok, ak vytvárame skupiny z jedného až štyroch prvkov?**

Riešenie:
Pre jeden prvok: $V^{\prime}_1(2) = 2^1 = 2$
Pre dva prvky: $V^{\prime}_2(2) = 2^2 = 4$
Pre tri prvky : $V^{\prime}_3(2) = 2^3 = 8$
Pre štyri prvky : $V^{\prime}_4(2) = 2^4 = 16$
Spolu: 2 + 4 + 8 + 16 =30
Môžeme vytvoriť 30 značiek Morseovej abecedy.

2. **Koľko šesťciferných čísel môžeme zostaviť z cifier 1,2,3,4,5,6,7, ak sa cifry môžu opakovať?**

Riešenie: $V^{\prime}_6(7) = 7^6 = 117\,649$

Môžeme vytvoriť 117 649 možnosti.

3. **Koľko je všetkých päťciferných prirodzených čísel, ak sa cifry môžu opakovať?**

Riešenie: $V^{\prime}_5(10) - V^{\prime}_4(10) = 10^5 - 10^4 = 100\,000 - 10\,000 = 90\,000$

Všetkých päťciferných prirodzených čísel, ak sa cifry môžu opakovať bude 90 000.

4. **V škatuľke je 10 farbičiek, z toho 4 rovnaké červené, 3 rovnaké modré, 2 rovnaké žlté a 1 zelená. Koľkými spôsobmi môžeme farbičky v škatuľke usporiadať?**

Riešenie: $P^{\prime}_{4,3,2,1}(10) = \frac{10!}{4!.3!.2!.1!} = \frac{3628800}{24.6.2.1} = 12\,600$

V škatuľke môžeme farbičky usporiadať 12 600 spôsobmi.

5. **Koľkými spôsobmi môžeme kúpiť v predajni 5 farbičiek, ak majú tri druhy farbičiek v dostatočnom množstve?**

Riešenie: $C_5'(3)=\binom{3+5-1}{5}=\binom{7}{5}=21$
V predajne môžeme kúpiť 21 spôsobmi 5 farbičiek, ak majú v ponuke tri druhy.

6. **V cukrárni majú 5 druhov zákuskov v dostatočnom množstve. Koľkými spôsobmi si môžeme kúpiť osem zákuskov?**

Riešenie: $C_8'(5)=\binom{8+5-1}{8}=\binom{12}{8}=495$

Ak v predajni majú 5 druhov zákuskov, tak máme 495 možností kúpiť si osem zákuskov.

Cvičenie:

1. Koľko rôznych jednociferných až päťciferných prirodzených čísel možno napísať z číslic 0,1,2,3, ak sa číslice môžu aj opakovať?
2. Koľko permutácií s opakovaním možno vytvoriť z písmen slova MISSISSIPPI?
3. Koľko je všetkých šesťciferných prirodzených čísel, ak sa cifry môžu opakovať?
4. V pekárni majú 6 druhov chleba v dostatočnom množstve. Koľkými spôsobmi si môžeme kúpiť 10 kusov?
5. Koľko rôznych telefónnych staníc možno zapojiť, ak sú všetky šesťmiestne a ani jedno z nich sa nezačína nulou?
6. V obchode predávajú 3 druhy sirupov – jablkový, malinový, pomarančový. Koľkými spôsobmi možno kúpiť 4 fľaše sirupu?
7. Koľko štátnych poznávacích značiek možno vytvoriť tým spôsobom, že za troma písmenami (spolu je ich 27) nasledujú štyri číslice?
8. Vo vrecku je 8 rovnakých lístkov označených číslami 1 až 8. Koľkými spôsobmi môžeme postupne s prihliadnutím na poradie vybrať tri z nich, ak sa vybraté lístky do vrecka vracajú?
9. Koľko je všetkých možných trojciferných prirodzených čísel, ak sa cifry môžu opakovať.
10. Aranžér má vo výklade zoradiť vedľa seba 2 rovnaké svetre, 2 rovnaké pulóvre a 4 košele. Koľkými možnými spôsobmi môže výklad upraviť?
11. Vo vlakovej súprave sú 2 nákladné vozne, jeden jedálny vozeň, 4 lôžkové a 3 ležadlové vozne. Koľkými rôznymi spôsobmi možno vlakovú súpravu zaradiť?
12. Koľko trojciferných prirodzených čísel možno zostaviť z číslic 2,3,4,5,8, ak sa číslice v čísle môžu opakovať?
13. V predajni majú 10 rôznych druhov novín a časopisov. Určte, koľkými spôsobmi si z nich môžeme kúpiť 5 druhov novín a časopisov?
14. Na poličke treba rozostaviť vedľa seba 3 zelené, 4 červené a 5 žlté hrnčeky. Koľko rôznych spôsobov rozostavenia môže vzniknúť?
15. V obchode predávajú 9 pohľadníc. Koľkými spôsobmi si môžeme z nich kúpiť 11 ks?
16. Koľkými spôsobmi je možné rozdať 32 hracích kariet 4 hráčom?
17. V cukrárni majú 5 druhov zmrzlín. Otec chce pre rodinu kúpiť 15 porcií. Koľkými spôsobmi môže zmrzlinu kúpiť?

18. Vo vydavateľstve kúpil Matúš 3 rovnaké fyziky, 2 rovnaké matematiky a 4 rovnaké čítanky. Koľkými spôsobmi ich môže položiť do tašky?
19. Koľko päťciferných čísel vytvoríme z cifier 1,2,3?
20. Koľko rôznych súčtov s troma sčítancami sa dá utvoriť z čísel 0,1,3,8, ak sa každý sčítanec môže až trikrát opakovať?

4 SPÄTNÁ VÄZBA

Posúdiť, či zvolený interaktívny elektronický učebný text je alebo nie je zaujímavý, dostatočne odborný alebo pre žiakov potrebný, je dosť subjektívne.

Pri tvorbe tohto učebného textu zohrávala významnú úlohu moja vlastná pedagogická skúsenosť, písomné práce z daného tematického celku, vypracované domáce úlohy, rozličné typy úloh zameraných na aktivitu priamo na vyučovacej hodine. Príklady na získanie vedomosti z jednotlivých tém z daného tematického okruhu Kombinatorika boli určené pre žiakov III. O triedy - odbor obchod a podnikanie, a III.I triedy - odbor informačné technológie v obchode. Žiaci III. O triedy - odbor obchod a podnikanie majú dotáciu troch vyučovacích hodín v treťom ročníku. Vyučovanie som realizovala prostredníctvom tabule. Žiaci III.I triedy - odbor informačné technológie v obchode majú len dvojhodinovú dotáciu hodín v danom ročníku. Žiaci tejto triedy pri vyučovaní majú plne k dispozícií počítač, interaktívnu tabuľu, dataprojektor.

Výzvou pre mňa bolo vytvoriť webovú stránku, ktorú mohli používať žiaci oboch tried. Na stránke boli poskytnuté vyriešené príklady z daného učiva krok po kroku. Na týchto jednotlivých príkladoch si mohli žiaci problematiku preštudovať. V závere každej kapitoly bolo ponúknutých niekoľko cvičení na domáce upevnenie učiva. Tu dostali priestor žiaci a dané domáce zadania mi odovzdávali na e-mailový účet s názvom andrea.klacekova@gmail.com. Keďže písanie matematických symbolov, vzorcov a teda aj konkrétnych príkladov je dosť časovo náročné, nemohla som chcieť, aby dané príklady riešili len pomocou počítača. Dohodli sme sa, že si ich napíšu do zošita, a ich riešenie preskenujú a odošlú na danú e-mailovú adresu. Tu som hlavne chcela dosiahnuť, aby si domáce zadanie robil každý žiak samostatne. Keďže písmo žiakov dobre poznám, nemohlo sa stať, že by jeden študent domáce zadanie vypracoval a poslal by ho zvyšným žiakom triedy. Každé domáce zadanie som dôsledne skontrolovala a spätne na ich e-mailové účty som odoslala opravené úlohy. Dostali spätnú väzbu, z čoho sa mohli poučiť a vyvarovať sa tým istým chybám.

Ich aktivita počas hodín, snaha naučiť sa čo najviac, plnenie si domácich zadaní viedlo ku krásnej pracovnej atmosfére počas hodiny, spolužiaci medzi sebou súperili, kto bude rýchlejší a kto bude mať správne vypočítané úlohy. Odozvou mojej práce bolo, keď pri každej písomnej práci žiaci odovzdávali vyplnené všetky zadania. Výsledky týchto písomných prác boli nie len pre mňa výbornou spätnou väzbou.

ZÁVER

Hlavným cieľom tejto práce bolo vytvoriť učebnú pomôcku pozostávajúcu z príkladov a cvičení z tematického celku Kombinatorika. Táto učebná pomôcka môže slúžiť nielen učiteľom ale aj žiakom a tak uľahčiť a zefektívniť časovo náročnú prácu na hodinách matematiky. Výzvou pre mňa bolo vytvorenie internetovej stránky. Stránka slúžila ako učebná pomôcka na hodinách matematiky v tematickou celku Kombinatorika na SOŠ v Prešove. Interaktívny učebný text si žiaci mohli prezerať a využívať na webovej stránke: www.kombinatorika.estranky.sk. Môj výklad počas vyučovania bežal súčasne aj na interaktívnej tabuli. Snažila som sa pomocou kvalitne spracovaného textu, naučiť žiakov ovládať základné kombinatorické postupy, metódy a vedieť ich využiť a aplikovať. Chcela som u žiakov rozvíjať logické postupy, rozvíjať ich kombinatorické myslenie.

Ak učiteľ ukáže žiakom aktívne pracovné prostredie, tak ich môže viesť k húževnatosti a snahe vzdelávať sa. Keďže matematika sa často pre žiakov zdá, že je nezrozumiteľná a suchá, snažila som sa na hodine vzbudiť záujem. K zmene situácie môže hlavne prispieť učiteľ tým, že u žiakov prebudí nadšenie a záujem o samotné učenie matematiky. Táto práca OPS, v ktorej som popísala svoje skúsenosti na SOŠ, môže žiakov viesť k vytrvalosti, k samostatnej práci a k získavaniu vedomostí.

Verím, že táto práca a webová stránka bude pre učiteľov matematiky vhodnou učebnou pomôckou.

ZOZNAM BIBLIOGRAFICKÝCH ZDROJOV

1. Bajtoš, J., Pavelka, J. 1999. Základy didaktiky technickej výchovy. Prešov. 1999. ISBN 80-88722-46-2
2. Čermák, P. Červinková, P. 2003. Zmaturuj z matematiky. Didaktis, Bratislava 2003. ISBN 80-89160-01-8
3. Huťka, V., Cirjak, M., Drobná, O., Švidrňová, A. 1994. Matematika pre študijné odbory SOŠ a SOU 7. časť. SPN, Bratislava. 1994. ISBN 80-08-02344-9
4. Petránek, O., Calda, E., Hebak, P. 1993. Matematika pre študijné odbory SOŠ a SOU 4. časť. SPN, Bratislava. 1993. ISBN 80-08-02114-4
5. Turek, I. 1997. Tvorba zrozumiteľného textu. Košice. 1997, ISBN 80-967249-9-1
6. Turek, I. 2009. Kvalita vzdelávania. Iura Edition, spol. s r. o., Bratislava. 2009. ISBN 978-80-8078-243-6

Internetové zdroje

1. Kombinácie bez opakovania [online]. sis.science.upjs.sk., [cit. 2. 3. 2014]. Dostupné na www: http://sis.science.upjs.sk/matematika/kniznica_vp/kombinat/kbezopak.htm
2. Kombinácie s opakovaním [online]. priklady.eu., [cit. 2. 3. 2014]. Dostupné na www:http://www.priklady.eu/sk/Riesene-priklady-matematika/Kombinatorika/Kombinacie.alej
3. Multimediálne učebné pomôcky vo vyučovacom procese [online]. public.sk., [cit. 2. 3. 2014]. Dostupné na www: http://www.pulib.sk/elpub2/FHPV/Pavelka1/23.pdf
4. Pascalov trojuholník [online]. czadro1.webnode.sk., [cit. 2. 3. 2014]. Dostupné na www:http://czadro1.webnode.sk/news/pascalov-trojuholnik/
5. Permutácie bez opakovania [online]. sis.science.upjs.sk., [cit. 2. 3. 2014]. Dostupné na www: http://sis.science.upjs.sk/matematika/kniznica_vp/kombinat/pbezopak.htm
6. Permutácie s opakovaním [online]. sis.science.upjs.sk., [cit. 2. 3. 2014]. Dostupné na www:http://sis.science.upjs.sk/matematika/kniznica_vp/kombinat/psopak.htm
7. Permutácie s opakovaním [online]. oskole.sk., [cit. 2. 3. 2014]. Dostupné na www: http://www.oskole.sk/?id_cat=2&clanok=16
8. Variácie [online]. sk.wikipedia.org., [cit. 2. 3. 2014]. Dostupné na www: http://sk.wikipedia.org/wiki/Vari%C3%A1cia_%28kombinatorika%29
9. Variácie [online]. priklady.eu., [cit. 2. 3. 2014]. Dostupné na www: http://www.priklady.eu/sk/Riesene-priklady-matematika/Kombinatorika/Variacie.alej
10. Variácie bez opakovania [online]. sis.science.upjs.sk., [cit. 2. 3. 2014]. Dostupné na www: http://sis.science.upjs.sk/matematika/kniznica_vp/kombinat/vbezopak.htm