Moderné vzdelávanie pre vedomostnú spoločnosť / Projekt je spolufinancovaný zo zdrojov EÚ

RNDr. Beáta Vavrinčíková

Didaktické hry vo vyučovaní matematiky na gymnáziu

Osvedčená pedagogická skúsenosť edukačnej praxe

Prešov
2013

Vydavateľ:	Metodicko-pedagogické centrum, Ševčenkova 11, 850 01 Bratislava
Autor OPS:	RNDr. Beáta Vavrinčíková
Kontakt na autora:	Gymnázium, Alejová 1, Košice beata.vavrincikova@gmail.com
Názov OPS:	Didaktické hry vo vyučovaní matematiky na gymnáziu
Rok vytvorenia OPS:	2013
Odborné stanovisko vypracoval:	RNDr. Janette Dlugošová

Za obsah a pôvodnosť rukopisu zodpovedá autor. Text neprešiel jazykovou úpravou.

Táto osvedčená pedagogická skúsenosť edukačnej praxe bola vytvorená z prostriedkov projektu Profesijný a kariérový rast pedagogických zamestnancov. Projekt je financovaný zo zdrojov Európskej únie.

Kľúčové slová

didaktická hra, matematická hra, optimálna stratégia, druhy a využitie hier, pravidlá hier, prémiové úlohy, motivácia žiakov, slávni matematici

Anotácia

Práca sa zaoberá problematikou didaktických hier ako jednej z aktivizujúcich metód vyučovania matematiky, je určená učiteľom matematiky vo vyššom strednom vzdelávaní (gymnáziá a stredné odborné školy). Vymedzuje pojmy didaktická hra a matematická hra, obsahuje zbierku týchto hier, ich pravidlá, analýzy, skúsenosti s ich realizáciou. Práca môže poslúžiť všetkým učiteľom, ktorí chcú sprístupňovať učivo zaujímavo, hravo a nenásilnou formou prispievať k rozvoju tvorivosti a myslenia.

OBSAH

ÚVOD

V posledných rokoch sa veľa hovorí o tom, ako zmeniť a vylepšiť vyučovací proces tak, aby boli spokojní nielen učitelia, ale aj žiaci, ktorí sa neraz sťažujú na jednotvárnosť a stereotyp vo vyučovaní. Chceli by zažiť niečo iné, ako len sedieť v laviciach, počúvať výklad učiteľa, či písať si poznámky. Ani učiteľom, ktorým záleží na tom, aké vedomosti si žiak z ich hodiny odnesie, táto problematika nie je ľahostajná.

Pre tých, ktorí by súčasný stav vyučovania chceli zmeniť, existuje viacero možností. Jednou z nich je využívanie metód aktívneho učenia sa. Pri aktívnom učení sa si žiak sám vytvára súbor vedomostí. Ak chce teda nejaké vedomosti získať, musí sa aktívne podieľať na činnostiach prebiehajúcich na hodinách. Existuje veľa druhov metód aktívneho učenia sa, pomocou ktorých sa dá obohatiť vyučovací proces. Jednou z týchto metód je didaktická hra. Tieto myšlienky nachádzame už v dielach J. A. Komenského, ktorý vychádzal z úcty k dieťaťu, ktoré vzdelávame. Zmenil dovtedy zaužívaný názor, že vzdelávanie je úporný dril, mechanické učenie sa textov naspamäť, a tento nezáživný prístup chcel nahradiť radosťou z poznania a hrou.

Táto práca OPS je venovaná problematike využitia didaktických hier vo vyučovaní matematiky na gymnáziách a je rozdelená do troch častí. V prvej časti je uvedený opis OPS, vysvetlený pojem didaktická hra a podrobne rozpísané didaktické hry, s ktorými máme dobré skúsenosti vo fáze precvičovania učiva. Pri jednotlivých hrách uvádzame nielen ich pravidlá, ale aj skúsenosti a rôzne modifikácie.

Druhá časť práce je venovaná špecifickému typu didaktickej hry a to matematickej hre. Najprv je stručne objasnený tento pojem a jeho význam v poznávacom procese. Okrem možnosti využiť matematické hry vo sfére motivácie je možné ich využitie na vyučovacej hodine aj s jedným z konkrétnych didaktických cieľov. V práci sa zameriame najmä na využitie týchto hier pri upevňovaní nového pojmu.

V tretej časti uvádzame hru, ktorá umožňuje netradičnou formou žiakom predstaviť slávne osobnosti z histórie matematiky. Súťažiaci tu môžu prepojiť svoje vedomosti z matematiky aj s vedomosťami z fyziky, filozofie či histórie. Hra je tak ukážkou využitia medzipredmetových vzťahov.

Práca môže poslúžiť učiteľom matematiky na gymnáziách (ale aj na základných školách či iných stredných školách) ako zbierka osvedčených hier, používaných pri upevňovaní nových pojmov a precvičovaní učiva v konkrétnych tematických celkoch. Hodnotu práce zvyšuje popis vlastných skúseností, doplňujúce úlohy a námety.

1 OPIS OSVEDČENEJ PEDAGOGICKEJ SKÚSENOSTI

Kontext:
V súčasnej škole je čoraz náročnejšie zaujať žiakov. Preto jednou z najdôležitejších úloh súčasného učiteľa je motivovať svojich žiakov a povzbudzovať ich k aktívnemu zapájaniu sa do vyučovania. Jednou z možností je využívanie aktivizujúcich metód. Medzi takéto aktivizujúce metódy matematickej edukácie môžeme zahrnúť najmä didaktické hry a súťaže, metódy objavovania, heuristickú metódu, motivačné rozprávanie s dôrazom na historické poznámky týkajúce sa matematiky a pod. V tejto práci je spracovaná téma z oblasti motivácie žiakov formou didaktických hier.

Špecifikácia cieľovej skupiny:
- ***podkategória pedagogických zamestnancov*** (podľa zákona č. 317/2009 Z. z.): učiteľ vyššieho stredného vzdelávania
- ***vzdelávacia oblasť:*** matematika a práca s informáciami
- ***škola:*** gymnázium
- ***vyučovací predmet:*** matematika
- ***tematický celok:*** v nasledujúcej tabuľke je uvedený prehľad všetkých hier, popísaných v tejto práci aj s uvedením tematického celku, na ktorý sa aktivita vzťahuje

TABUĽKA DIDAKTICKÝCH HIER		
NÁZOV HRY	STRANA	TEMATICKÝ CELOK
Bludisko	9	postupnosti, funkcie, stereometria
Bingo - bongo	13	rovnice, sústavy rovníc
Goniometrické skladačky	17	goniometrické funkcie
Nebezpečné územie	21	goniometrické funkcie
Zakázané delitele	25	deliteľnosť čísel
Počet deliteľov	26	deliteľnosť čísel
Stymie	26	deliteľnosť čísel
Rovnice	27	rovnice, sústavy rovníc
Fibonacci-Nim	29	postupnosti
Indície z histórie	31	história matematiky

Hlavné ciele:
Hlavným cieľom práce je poskytnúť učiteľom matematiky metodický materiál zameraný na využitie didaktických hier vo vyučovaní matematiky na gymnáziu.
V teoretickej časti práce sú vymedzené pojmy didaktická hra a matematická hra, rozdelenie hier podľa optimálnej stratégie a ich využitie. Hry využívame nielen v rámci motivácie žiakov, ale najmä pri precvičovaní učiva a upevňovaní nového pojmu. Pri realizácii hier väčšinou volíme turnaj jednotlivcov alebo skupinovú prácu. Tým, že

mnohé hry majú charakter súťaženia, merania síl a schopností, sú blízke žiakovej psychike. Vďaka tomu umožňujú dostať matematiku a kauzálne úvahy do sféry jeho spontánneho záujmu. Nutnosť vzájomnej komunikácie, prípadne aj riešenia konfliktov počas turnajov umožňuje rozvíjať viaceré spôsobilosti. Dôležitou časťou vyučovacej hodiny môže byť aj spoločné hľadanie a zverejnenie stratégie. Optimálna stratégia (ak je známa) reprezentuje v hre matematiku, logické myslenie.
V praktickej časti práce popisujeme svoje skúsenosti s využívaním týchto hier na vyučovaní. Pravidlá hier, ich stratégie, skúsenosti s nimi, ako aj prémiové úlohy a ďalšie námety na ich využitie môžu byť užitočnou pomôckou pre mnohých učiteľov. V poslednej časti práce uvádzame hru, ktorá umožňuje netradičnou formou žiakom predstaviť slávne osobnosti z histórie matematiky. Súťažiaci tu môžu prepojiť svoje vedomosti z matematiky aj s vedomosťami z fyziky, filozofie či histórie. Hra je tak peknou ukážkou využitia medzipredmetových vzťahov.

Vymedzenie kompetencií žiakov:
Absolvovaním vyučovacích hodín s využitím didaktických hier žiak môže rozvíjať tieto kompetencie:
kompetencia k celoživotnému učeniu sa
- dokáže reflektovať proces vlastného učenia sa a myslenia pri získavaní a spracovávaní nových poznatkov a informácií a uplatňuje rôzne stratégie učenia sa,
- kriticky hodnotí svoj pokrok, prijíma spätnú väzbu,

sociálne komunikačné kompetencie
- vie prezentovať sám seba a výsledky svojej práce,
- dokáže primerane komunikovať v materinskom jazyku,

kompetencie uplatňovať základ matematického myslenia
- používa matematické myslenie na riešenie problémov,
- používa matematické modely logického a priestorového myslenia a prezentácie,

kompetencia riešiť problémy
- uplatňuje pri riešení problémov vhodné metódy založené na analyticko-kritickom a tvorivom myslení,
- je otvorený získavaniu a využívaniu rôznych, aj inovatívnych postupov, formuluje argumenty a dôkazy na obhájenie svojich výsledkov,
- má predpoklady na konštruktívne a kooperatívne riešenie konfliktov,

kompetencie občianske
- vyvážene chápe svoje osobné záujmy v spojení so záujmami širšej skupiny,

kompetencie sociálne a personálne
- dokáže odhadnúť a korigovať dôsledky vlastného správania a konania a uplatňovať sociálne prospešné zmeny v medziosobných vzťahoch,

kompetencie smerujúce k iniciatívnosti a podnikavosti
- dokáže inovovať zaužívané postupy pri riešení úloh,

kompetencie vnímať a chápať kultúru
- správa sa kultivovane, primeranie okolnostiam, situáciám.

2 DIDAKTICKÉ HRY

V pedagogickom slovníku (Průcha, Walterová, Mareš, 2009, s. 51) nájdeme takúto charakteristiku **didaktickej hry**: *Analógia spontánnej činnosti detí, ktorá sleduje (pre žiakov nie vždy zjavným spôsobom) didaktické ciele. Môže sa odohrávať v učebni, v telocvični, na ihrisku, v prírode. Má svoje pravidlá, vyžaduje priebežné riadenie a záverečné vyhodnotenie. Je určená jednotlivcom aj skupinám žiakov, pričom rola pedagogického vedúceho má široké rozpätie od hlavného organizátora až po pozorovateľa. Jej prednosťou je stimulačný náboj, lebo prebúdza záujem, zvyšuje angažovanosť žiakov na vykonávaných činnostiach, podnecuje ich tvorivosť, spontánnosť, spoluprácu aj súťaživosť, núti ich využívať rôzne poznatky a schopnosti, zapájať životné skúsenosti. Niektoré didaktické hry sa približujú modelovým situáciám z reálneho života.*

Táto definícia teda popisuje didaktickú hru ako činnosť žiakov a učiteľa, ktorá vedie k dosiahnutiu istých didaktických cieľov. Porovnajme toto tvrdenie s vymedzením **vyučovacej metódy** v tomto slovníku (Průcha, Walterová, Mareš, 2009, s. 355): *Postup, cesta, spôsob vyučovania (grécky methodos). Charakterizuje činnosť učiteľa vedúceho žiaka k dosiahnutiu stanovených vzdelávacích cieľov.* Vidíme, že didaktickú hru možno považovať za vyučovaciu metódu.

Najdôležitejšími časťami didaktickej hry sú (Vankúš, 2010, s. 5-6):

- Prostredie hry
- Ciele hry
- Samotná hrová činnosť, riadená pravidlami hry
- Záverečné vyhodnotenie hry

Prostredím hry rozumieme jednak materiálne prostredie: potrebné pomôcky a vybavenie. Ďalšou zložkou tohto prostredia je samotná hra, jej pravidlá, zadania úloh, priebeh a forma aktivít žiakov a učiteľa. Najdôležitejšou časťou prostredia hry sú samozrejme zúčastnení žiaci a učitelia. Žiaci do hry prinášajú svoje očakávania, skúsenosti, záujmy, postoje k matematike a tiež svoje vedomosti a zručnosti. Učiteľ má kontrolnú a organizačnú funkciu. Jeho úlohou je zabezpečiť hladký a úspešný priebeh hry. Usporiadanie prostredia hry má byť faktorom, ktorý motivuje žiakov a vedie ich k aktívnej účasti na hre a k snahe o realizáciu cieľov hry.

Ciele didaktickej hry sú determinované edukačným cieľom, ktorý chceme pomocou hry realizovať. Na základe tohto cieľa vyberáme vhodný typ a formu didaktickej hry. Použitie hry ako vyučovacej metódy má význam, len ak umožňuje dosiahnutie stanovených edukačných cieľov.

Samotná hrová činnosť je realizáciou didaktickej hry v rámci činností žiakov a učiteľa. Je nevyhnutné, aby táto činnosť bola pre žiakov zaujímavá a motivovala ich k aktivite. Musí byť primeraná veku a schopnostiam žiakov, rešpektovať ich potreby. Zároveň ale musí viesť k dosiahnutiu edukačných cieľov. Práca smerujúca k realizácii zámerov hry je zaistená pravidlami.

Pravidlá hry určujú charakter a spôsob činností žiakov, organizujú ich aktivitu. V pravidlách sú obyčajne skryté hravé prvky ako súťaživosť, snaha dosiahnuť lepší výsledok.

Záverečné vyhodnotenie hry overuje dosiahnutie vzdelávacieho cieľa, má za úlohu odmeniť žiakov a motivovať ich k ďalšej činnosti.

U nás i v zahraničí prebehli viaceré výskumy ohľadne používania didaktických hier vo vyučovaní matematiky. Výsledky týchto výskumov ukazujú prínos najmä čo sa týka zlepšenia motivácie a pocitového prežívania žiakov. Hry tiež popri dosahovaní vzdelávacích cieľov umožňujú rozvoj niektorých dôležitých kľúčových kompetencií, napr. spolupráce, komunikácie, tvorivého a logického myslenia.

Didaktickú hru prezentujeme žiakom obvykle na hodine, na ktorej ju chceme použiť. Ústne oboznámime žiakov s pravidlami hry. Vysvetľovanie pravidiel je treba robiť názorne, najlepšie na konkrétnych príkladoch herných situácií. Ako vhodné sa ukázalo po prezentovaní pravidiel zaradiť ukážkovú hru resp. časť hernej aktivity, na ktorej majú žiaci možnosť overiť si správne pochopenie pravidiel. Nasleduje samotná realizácia didaktickej hry. Ak to hra vyžaduje, rozdelíme žiakov do družstiev.

Úlohou učiteľa počas didaktickej hry je spravidla kontrolovať dodržiavanie pravidiel a prípadne organizačne riadiť priebeh hry. Po ukončení hry je potrebné zhodnotiť jej priebeh a prácu jednotlivých hráčov. Pri tomto hodnotení treba zohľadniť nielen výsledky žiakov, ale aj ich snahu. V konečnom dôsledku každý žiak, ktorý aktívne počas hry pracoval, by mal byť odmenený a povzbudený. Tým zvyšujeme motiváciu žiakov podieľať sa na herných aktivitách. Táto motivácia sa môže sekundárne preniesť aj na iné učebné aktivity v rámci hodín matematiky.

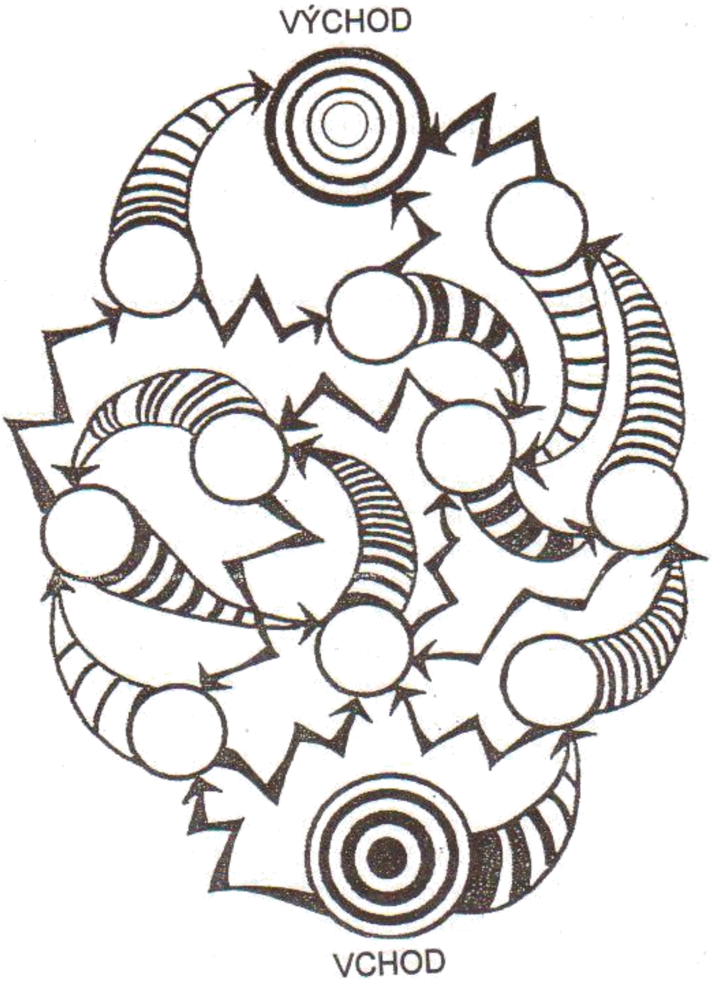
V praktickej časti práce popisujeme 10 hier, s ktorými máme dobré skúsenosti. Hry v tejto zbierke pochádzajú z rôznych prameňov. Mnohé z hier sa vyskytujú vo viacerých dielach a to v rozmanitých modifikáciách. Aj my sme pri vytváraní zbierky niektoré z hier prispôsobili svojim požiadavkám. Preto v zbierke pri samotných hrách uvádzame ten prameň, z ktorého sme námety na jednotlivé hry čerpali pri písaní tejto práce.

2.1 Bludisko

Hra je vhodná na zopakovanie teoretickej časti učiva z ktoréhokoľvek tematického celku. Učiteľ si pripraví sadu 10 tvrdení, úlohou žiakov je rozhodnúť o ich pravdivosti. Využitie bludiska dodá prvok napätia.

Zdroj: Schätz, 2002, s. 89

Pomôcky: bludisko a pracovný list s tvrdeniami



Obrázok 1 Bludisko

Zdroj: Schätz, 2002, s. 92

Popis: Žiaci pracujú samostatne alebo vo dvojiciach či trojiciach. Dostanú bludisko a pracovný list s pokynmi:
Rozhodnite, či nasledujúce tvrdenia sú pravdivé alebo nepravdivé a nájdite odpovedajúcu cestu von z bludiska. Začnite políčkom s názvom „Vchod“. Ak je tvrdenie 1. pravdivé, postúpte ďalej podľa šikmej pruhovanej šípky. Ak je však tvrdenie 1. nepravdivé, choďte na ďalšie políčko podľa šípky, ktorá je nakreslená „cikcak". Do políčka, na ktoré ste sa takto dostali, napíšte cifru 1 a pokračujte ďalej. Môže sa stať, že takto prejdete niektorými políčkami viackrát a niektoré naopak úplne vynecháte. Ak ste bludiskom prešli správne, dôjdete po 10. tvrdení k políčku „Východ“.

Skúsenosti: Hra je dobrá na prácu vo dvojiciach, keď žiaci medzi sebou diskutujú o jednotlivých tvrdeniach, presviedčajú sa navzájom o ich správnosti alebo nesprávnosti. Učiteľ skontroluje bludiská tým dvojiciam, ktoré po 10. tvrdení došli na políčko „Východ“. Všetkým žiakom oznámi správne odpovede, aby si ich mohli skontrolovať. Istou nevýhodou tejto hry je skutočnosť, že ak sa žiaci v niektorej otázke pomýlia, zistia to obvykle až na konci, keď sa nedostanú z bludiska von.

Počas prípravy na vyučovaciu hodinu si učiteľ potrebuje pripraviť vhodné tvrdenia a usporiadať ich tak, aby sa po poslednom tvrdení žiaci dostali z bludiska von. Počet tvrdení môže byť aj väčší než 10, hra potom trvá dlhšie.

Ukážky nami vytvorených bludísk:

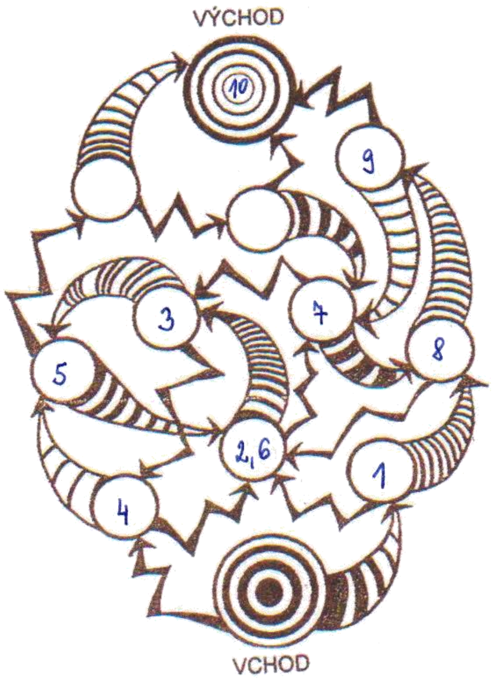
2.1.1 Aritmetická postupnosť

Žiaci majú rozhodnúť o pravdivosti tvrdení zaoberajúcich sa vlastnosťami aritmetickej postupnosti:

1. Postupnosť $\left\{\frac{1}{9}; -\frac{1}{9}; -\frac{3}{9}; -\frac{5}{9};\dots\right\}$ je aritmetická.
2. Neexistuje aritmetická postupnosť, ktorá by nebola prostá.
3. Ak aritmetická postupnosť je ohraničená, potom $d < 1$.
4. Ak v aritmetickej postupnosti platí $a_1 = 4, d = -3,$ potom $a_8 = -18.$
5. Ak v aritmetickej postupnosti platí $a_1 = 3, a_{n+1} = a_n + 2$, potom $a_n = 2n + 1.$
6. Rekurentné vyjadrenie postupnosti $\{3n - 7\}_{n=1}^{\infty}$ je $a_1 = -4, a_{n+1} = a_n + 3.$
7. Postupnosť $\{n(n-2)\}_{n=1}^{\infty}$ je aritmetická.
8. V každej aritmetickej postupnosti platí: $a_{13} - a_{10} = a_{23} - a_{20}$
9. V každej aritmetickej postupnosti platí $\forall n \in N, n \geq 2 : a_n = \frac{a_{n-k} + a_{n+k}}{2}$, kde $k \in N, k < n.$
10. Ak aritmetická postupnosť je klesajúca, potom $d < -1$.

Správne odpovede: áno, nie, áno, nie, áno, áno, nie, áno, áno, nie

Ukážka vyplneného bludiska: *obrázok 2*



Obrázok 2 Ukážka vyplneného bludiska

2.1.2 Logaritmická funkcia, logaritmus.
Nasledujúce tvrdenia sa týkajú vlastností logaritmických funkcií a logaritmov.

1. Číslo 4 patrí do definičného oboru funkcie $f: y = \dfrac{\log_2 x^2}{\log_4 x}$.
2. $\forall a, b \in R^+ : \ln a + \ln b = \ln(a+b)$
3. $\log_8 5 = \dfrac{\log_7 8}{\log_7 5}$
4. Graf logaritmickej krivky $y = \log_2 x + 2$ prechádza len I. a IV. kvadrantom.
5. Obor hodnôt funkcie $y = \log_6 x$ je $(0; \infty)$.
6. $\log_{\frac{1}{3}} 5 > \log_{\frac{1}{3}} 7$
7. $\ln e^4 + 3\ln e^2 = 10$
8. Graf funkcie $y = \ln x$ je súmerný podľa osi *x.*
9. Funkcia $y = \log_3 x$ je rastúca a ohraničená.
10. $\log_{\frac{1}{2}} 3 > 0$

Správne odpovede: áno, nie, nie, áno, nie, áno, áno, nie, nie, nie

2.1.3 Rovnobežnosť a kolmosť lineárnych útvarov
Po skončení tejto hry je vhodné nielen povedať správne odpovede, ale ich aj názorne demonštrovať pomocou jednoduchých modelov priamok a rovín. Zvlášť dôležité je ukázať protipríklady pri nepravdivých tvrdeniach, o ktorých si žiaci mysleli, že platia.

1. Ak je priamka *p* rovnobežná a rovinou α a priamka *q* je tiež rovnobežná s rovinou α, tak sú priamky *p* a *q* navzájom rovnobežné.
2. Pre ľubovoľnú priamku p a roviny α, β platí: $p \perp \alpha \wedge \alpha \perp \beta \Rightarrow p \parallel \beta$.
3. Pre ľubovoľné roviny α, β, γ platí: $\alpha \perp \beta \wedge \beta \perp \gamma \Rightarrow \alpha \parallel \gamma$.
4. Ak je priamka rovnobežná s rovinou, tak je rovnobežná s každou priamkou tejto roviny.
5. Ak dve rôznobežné roviny sú kolmé na tú istú rovinu, tak aj ich priesečnica je kolmá na túto rovinu.
6. Ak je priamka rôznobežná s rovinou, tak je rôznobežná s každou priamkou tejto roviny.
7. Ak je priamka p rovnobežná s rovinami α a β, tak sú tieto roviny rovnobežné.
8. Ak je rovina α rovnobežná s rovinou β a rovina β je rovnobežná s rovinou γ, tak sú navzájom rovnobežné aj roviny α a γ.
9. Ak je priamka *p* rovnobežná a rovinou α a priamka *q* je tiež rovnobežná s rovinou α, tak sú priamky *p* a *q* navzájom rovnobežné.
10. Ak je priamka rovnobežná s rovinou, tak je rovnobežná s niektorou priamkou tejto roviny.

Správne odpovede: nie, áno, nie, nie, áno, nie, nie, áno, nie, áno

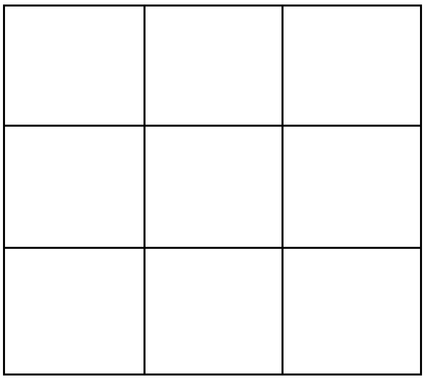
2.2 BINGO - BONGO

Matematické Bingo - Bongo je vhodná súťaž na precvičenie niektorých algoritmov, dá sa využiť v mnohých tematických celkoch. Hlavným cieľom tejto aktivity je nácvik algoritmov a iných zručností, ktoré žiaci potrebujú mať zautomatizované. Pri učive tohto typu však hrozí útlm pozornosti vzhľadom na stereotypnú činnosť a zníženie motivácie žiakov, ktorí majú pocit, že počítanie úloh daného typu už dobre ovládajú. Učiteľ však vie, nakoľko dôležitý je cvik a určitá automatizácia týchto zručností, preto sa snaží udržať chuť žiakov počítať rôznymi druhmi matematických súťaží, hier a pod. Hra Bingo - Bongo je jednou z nich. Veľmi dobré skúsenosti máme s využitím tejto hry v nižších ročníkoch osemročného gymnázia, ale aj u starších žiakov je občasné zaradenie tejto hry do vyučovania vítaným spestrením.

Zdroj: s touto hrou sme sa prvýkrát oboznámili na Letnej škole Pytagoras v Hutách v roku 1995, v literatúre možno nájsť jej rôzne modifikácie – napr. Matfiaková, 2012, s. 8; Vankúš, 2010, s. 34. Na nasledujúcich stranách popisujeme pravidlá a modifikácie hry, s ktorými máme dobré skúsenosti.

Pomôcky: papier, pero

Popis:
Každý žiak si do zošita pripraví tabuľku 3x3 prázdnych políčok.



Obrázok 3 Hrací plán hry Bingo-Bongo

Učiteľ napíše žiakom na tabuľu 15 výsledkov na následne zadávané úlohy (osvedčilo sa výsledky zoradiť podľa veľkosti). Každý žiak si z nich vyberie 9 výsledkov a zapíše si ich do svojej tabuľky tak, ako sám chce (každý výsledok najviac raz, neopakujú sa). Učiteľ skontroluje, že všetci žiaci majú svoje tabuľky vyplnené. Potom učiteľ postupne začne zadávať jednotlivé úlohy. Na každú úlohu ponechá žiakom približne rovnaký čas. Každý žiak vypočíta zadanú úlohu, a ak sa zhoduje výsledok s niektorým z výsledkov v jeho tabuľke, preškrtne ho. Ak má preškrtnuté tri čísla v celom riadku, stĺpci alebo diagonále, tak má Bingo, čo môže nahlas oznámiť. Ak sú všetky výsledky v tabuľke prešrtnuté, žiak vykríkne, že má Bongo a prinesie zošit na kontrolu. Učiteľ skontroluje, či má žiak naozaj všetky dovtedy zadané úlohy vypočítané správne a či výsledky z jeho úloh korešpondujú s výsledkami v tabuľke. Ostatní žiaci môžu tento čas využiť na prepočítanie príkladov, ktoré im nevyšli alebo ktoré nestihli dopočítať. Ak žiak s Bongom má všetky príklady

správne vyriešené, tak podľa dohody buď hra končí alebo pokračuje ďalej. Ak má tento žiak vo svojich riešeniach chybu, hra pokračuje ďalej. Spôsob bodovania či iného hodnotenia úspešných žiakov si určí sám učiteľ. Po skončení hry je potrebné napísať na tabuľu správne výsledky všetkých príkladov a dať žiakom možnosť skontrolovať si svoje riešenia v zošite.
Hra sa môže zdať niektorým žiakom nespravodlivá, lebo „ide o náhodu“, keďže si na začiatku hry vyberajú čísla z ponúknutých výsledkov. Avšak práve vďaka tejto „náhode“ majú šance aj slabší žiaci, pre ktorých je výhra neuveriteľnou motiváciou. Úspešným však môže byť len ten, kto vie presne a dostatočne rýchlo počítať.

Skúsenosti: Osvedčilo sa nám ponúkať jednotku prvým trom žiakom, ktorí budú mať Bongo. Kontrola zošitov je dôležitá, pretože žiaci môžu mať chybne vyriešené rovnice (najmä pri kvadratických rovniciach sú bežné chyby v znamienkach výsledkov) a napriek tomu (či skôr vďaka tomu) vyškrtnuté všetky čísla v tabuľke. Teoreticky by už po deviatom príklade mohol mať niekto Bongo, prakticky to však býva až po 12. alebo 13. príklade. Osvedčilo sa aj to, ak sa učiteľ napríklad po 12. príklade žiakov spýta, koľko čísel v tabuľke majú ešte nevyškrtnutých. Ak na základe odpovedí usúdi, že sa im nedarí, môže hru na niekoľko minút prerušiť a dať im možnosť vrátiť sa k príkladom, ktoré im nevyšli alebo ktoré nestihli vypočítať. V hrách, kde má každý príklad jeden výsledok (napríklad lineárne rovnice) majú žiaci priebežne spätnú väzbu – ak im vyjde výsledok, ktorý nebol na začiatku hry medzi ponúknutými výsledkami, vedia, že majú chybu a chcú si ju opraviť. V hrách, kde vychádza viac výsledkov (napr. kvadratické rovnice) už spätná väzba takto nefunguje. Stáva sa aj to, že pri týchto hrách nikto nezíska Bongo. Dať však žiakom možnosť opraviť si chyby až po 15. príklade sa nám ukázalo ako neefektívne, pretože u žiakov už prevládlo rozčarovanie z neúspechu a možno aj únava.

Ukážky nami vytvorených hier:

2.2.1 Lineárne rovnice

Hra precvičuje riešenie lineárnych rovníc a rovníc s neznámou v menovateli. Od žiakov vyžadujeme, aby pri rovniciach s neznámou v menovateli mali zapísané všetky potrebné podmienky.

Ponúknuté výsledky: -13; -12; -8; -4; -3; -2; -1; 0; 1; 3; 4; 5; 8; 9; 21

Príklady:	***Výsledky:***
1) $\frac{3}{2x}=\frac{1}{6}$	9
2) $\frac{5}{4x+7}=\frac{3}{2x-1}$	-13
3) $\frac{3x+7}{5}-\frac{8-x}{3}=x-1$	- 4
4) $\frac{5r-2}{8r-3}=\frac{3}{5}$	1
5) $\frac{y+3}{4}-\frac{y-5}{3}=2$	5
6) $\frac{2x+12}{3x}=2$	3

7) $(3y-7)(9+4y)=(6y-1)(5+2y)$ -2

8) $\dfrac{x+1}{x-2}-\dfrac{x-1}{x+2}=0$ 0

9) $\dfrac{9-4r}{3}=7$ -3

10) $\dfrac{\frac{x}{5}-\frac{1}{2}}{x-3}=\dfrac{3}{10}$ 4

11) $0{,}3(2+3x)=0{,}5(2x-3)$ 21

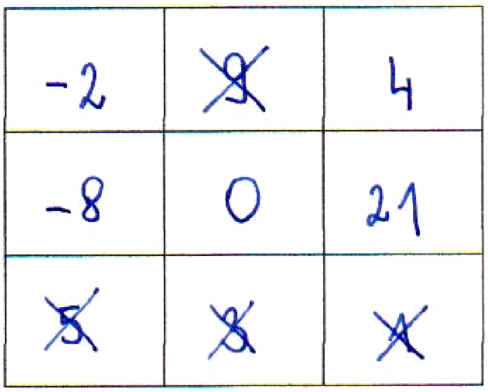
12) $\dfrac{x+1}{x-2}=0$ -1

13) $4(x-0{,}5)-9(7-2x)=3(5x+1)-12$ 8

14) $\dfrac{1}{x+3}=\dfrac{2}{x-2}$ -8

15) $\dfrac{3}{4}x-\dfrac{5}{6}x=\dfrac{3}{8}x+5{,}5$ -12

Ukážka možného priebehu hry po šiestich rovniciach – žiak získal bingo za tri čísla preškrtnuté v jednom riadku:



Obrázok 4 Ukážka priebehu hry

2.2.2 Kvadratické rovnice

Hra je zameraná na riešenie jednoduchých kvadratických rovníc pomocou rozkladu na súčin. Okrem jednej rovnice majú všetky ostatné dva korene, avšak v ponúknutých výsledkoch je len jeden z nich. Žiakov treba upozorniť, že musia mať v zošite správne uvedený aj ten druhý koreň.

Ponúknuté výsledky: -9; -8; -6; -5; -3; -2; -1; 1; 2; 3; 4; 6; 8; 13; 14

Príklady: ***Výsledky:***

1) $3{,}5x^2=7x$ 0; 2

2) $x^2+x-12=0$ 3; -4

3) $x^2-16x+15=0$ 1; 15

4) $x^2+4x-45=0$ -9; 5

5) $x^2 - 16x + 64 = 0$ 8
6) $x^2 + 5x + 4 = 0$ -1; -4
7) $x^2 + x = 56$ -8; 7
8) $x^2 - 4x - 140 = 0$ -10; 14
9) $2x^2 = -6x$ 0; -3
10) $x^2 - 25 = 0$ -5; 5
11) $x^2 = 14x - 40$ 4; 10
12) $x^2 + 13x + 42 = 0$ -6; -7
13) $x^2 - 2x - 24 = 0$ 6; -4
14) $x^2 + 6x + 8 = 0$ -2; -4
15) $x^2 - 20x + 91 = 0$ 13; 7

2.2.3 Rovnice s absolútnou hodnotou

Táto hra je zameraná na riešenie jednoduchých rovníc s absolútnou hodnotou. Obsahuje len 10 úloh, pretože všetky výsledky sú medzi ponúknutými. To zlepšuje spätnú väzbu žiakom počas riešenia.

Ponúknuté výsledky: -24; -13; -7; -6; -5; -2; -1; 0; 2; 3; 4; 5; 7; 8; 15

Príklady:	***Výsledky:***
1) $\lvert x-3\rvert = 1$	2; 4
2) $\lvert 5-x\rvert = 0$	5
3) $\left\lvert \frac{x}{2}+4\right\rvert = 8$	-24; 8
4) $x = \lvert x\rvert - 12$	-6
5) $6.(\lvert x\rvert + 3) - 15 = 3$	0
6) $\left\lvert x-\frac{1}{2}\right\rvert = \frac{5}{2}$	-2; 3
7) $\lvert x\rvert - 14 = \lvert x\rvert - \lvert x-1\rvert$	-13; 15
8) $\lvert \lvert x\rvert - 2\rvert = 5$	-7; 7
9) $\lvert x+3\rvert = 2$	-5; -1
10) $\lvert x\rvert - 3 = -4$	Ø

2.2.4 Sústava dvoch lineárnych rovníc s dvoma neznámymi

Táto hra sa odlišuje od predchádzajúcich tým, že si žiaci pripravia dve tabuľky 2x2 políčka. Do jednej budú zapisovať výsledky pre neznámu *x*, do druhej pre neznámu *y*. Bingo znamená mať vyplnenú jednu tabuľku, Bongo obidve tabuľky. Hra obsahuje sedem jednoduchých sústav lineárnych rovníc s dvoma neznámymi.

Ponúknuté výsledky pre x: -3; -2; -1; 1; 4; 5; 8

Ponúknuté výsledky pre y: -2; 1; 2; 4; 5; 8; 9

Príklady:	***Výsledky:***
1) $y = 2x + 2$ $2x + 3y = 14$	$[1; 4]$
2) $10x + 2y = -14$ $x + y = -3$	$[-1; -2]$
3) $3(x-1) = 4y + 1$ $x + 1 = 5(y-1)$	$[4; 2]$
4) $5y + 4(x+2) = 1$ $-3 + 3(y+2) = -2x$	$[-3; 1]$
5) $\frac{x}{2} = 1 + \frac{y}{3}$ $x - 1 = y - 2$	$[8; 9]$
6) $\frac{5x}{2} + \frac{y}{5} = -4$ $\frac{x}{3} + \frac{y}{6} = \frac{1}{6}$	$[-2; 5]$
7) $2 + \frac{y-2}{3} = \frac{x+3}{2}$ $\frac{x-1}{4} + \frac{y+1}{3} = 4$	$[5; 8]$

2.3 Goniometrické skladačky

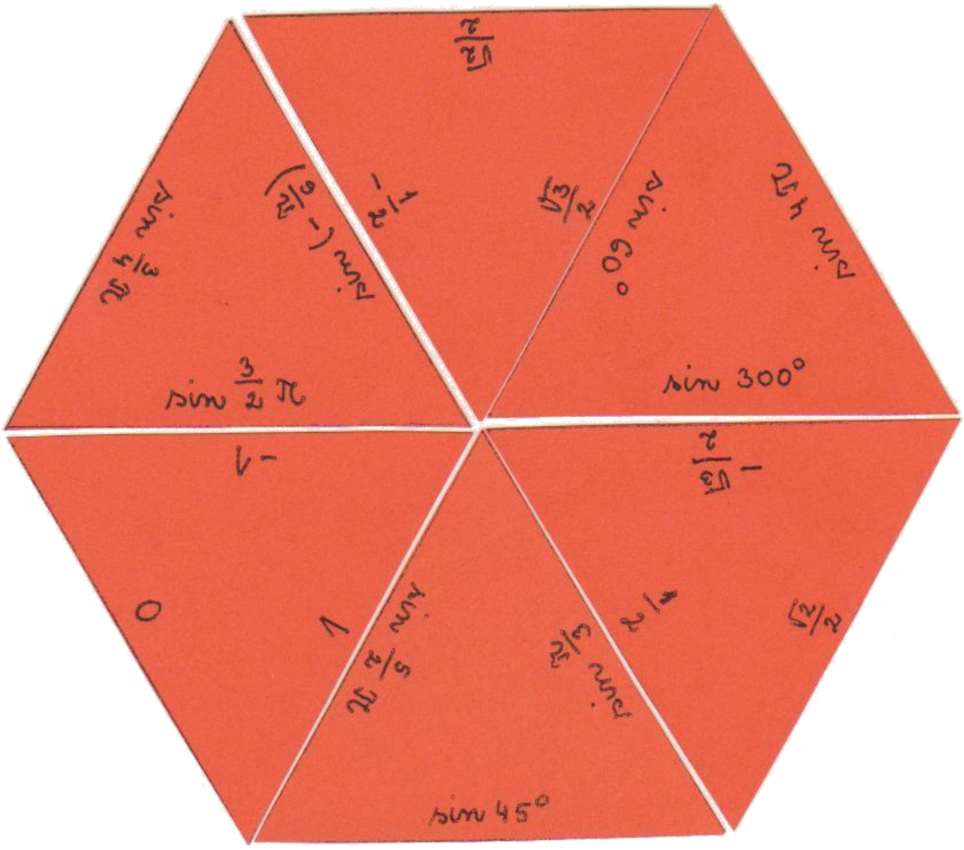
Učivo o goniometrických funkciách je náročné na množstvo pojmov, ktoré musia žiaci zvládnuť. Patrí medzi ne aj určovanie hodnôt goniometrických funkcií v jednotlivých kvadrantoch. Pri precvičovaní tohto učiva sme vyzvali žiakov, aby pre svojich spolužiakov pripravili hry s touto témou. Uvedieme štyri z nich.

2.3.1 Šesťuholník

Pomôcky: sady trojuholníkov

Pravidlá: V tejto hre je úlohou žiakov poskladať šesťuholník zo šiestich rovnostranných trojuholníkov. Každá strana trojuholníka obsahuje jednu hodnotu goniometrickej funkcie. Prislúchajúci výsledok sa nachádza na druhom trojuholníku. Úlohou žiakov je nájsť odpovedajúce dvojice a spojiť strany trojuholníkov, na ktorých sú tieto dvojice, dohromady. Takto žiaci postupne vytvárajú šesťuholník. Priraďovanie dvojíc je jednoznačné, teda nemôže nastať situácia, kedy by sa dali priradiť k jednému pojmu dva rôzne výsledky. Táto hra sa môžu hrať v skupinách alebo samostatne. Cieľom hry je čo najrýchlejšie a správne poskladať obrazec, ktorého tvar je vopred daný.

Riešenie:



Obrázok 5 Šesťuholník

Skúsenosti: Táto skladačka sa ukázala byť veľmi náročná, nakoľko aj údaje uvedené po obvode šesťuholníka vytvárajú dvojice. Iba jednej skupine žiakov sa ho podarilo zložiť správne, ostatným sa to buď nepodarilo, alebo nesprávne spojili príklad s výsledkom.

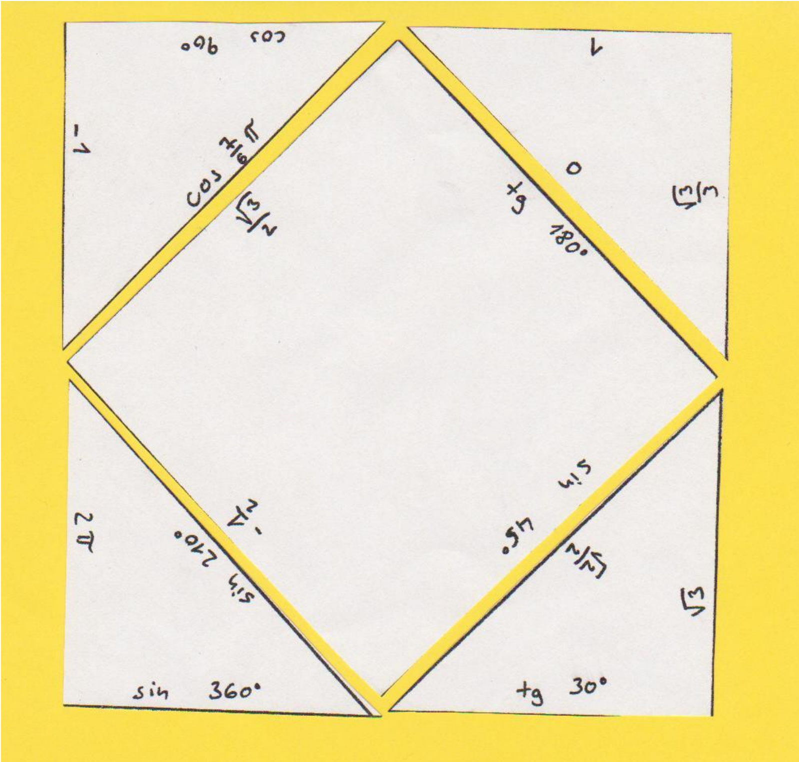
2.3.2 Skladačka

Pomôcky: sady obrazcov

Pravidlá: Pravidlá sú rovnaké ako v predchádzajúcej hre, ale výsledný obrazec nie je vopred známy.

Skúsenosti: Ide o jednoduchú skladačku, nakoľko k stranám štvorca je možné priložiť trojuholníky len preponami. I keď výsledný tvar nebol daný, väčšina skupín zložila štvorec. Túto hru vytvoril žiak, ktorý nemá kladný vzťah k matematike a dosahuje v nej slabé výsledky, preto si ceníme fakt, že bol ochotný pre spolužiakov niečo pripraviť.

Riešenie:



Obrázok 6 Štvorec

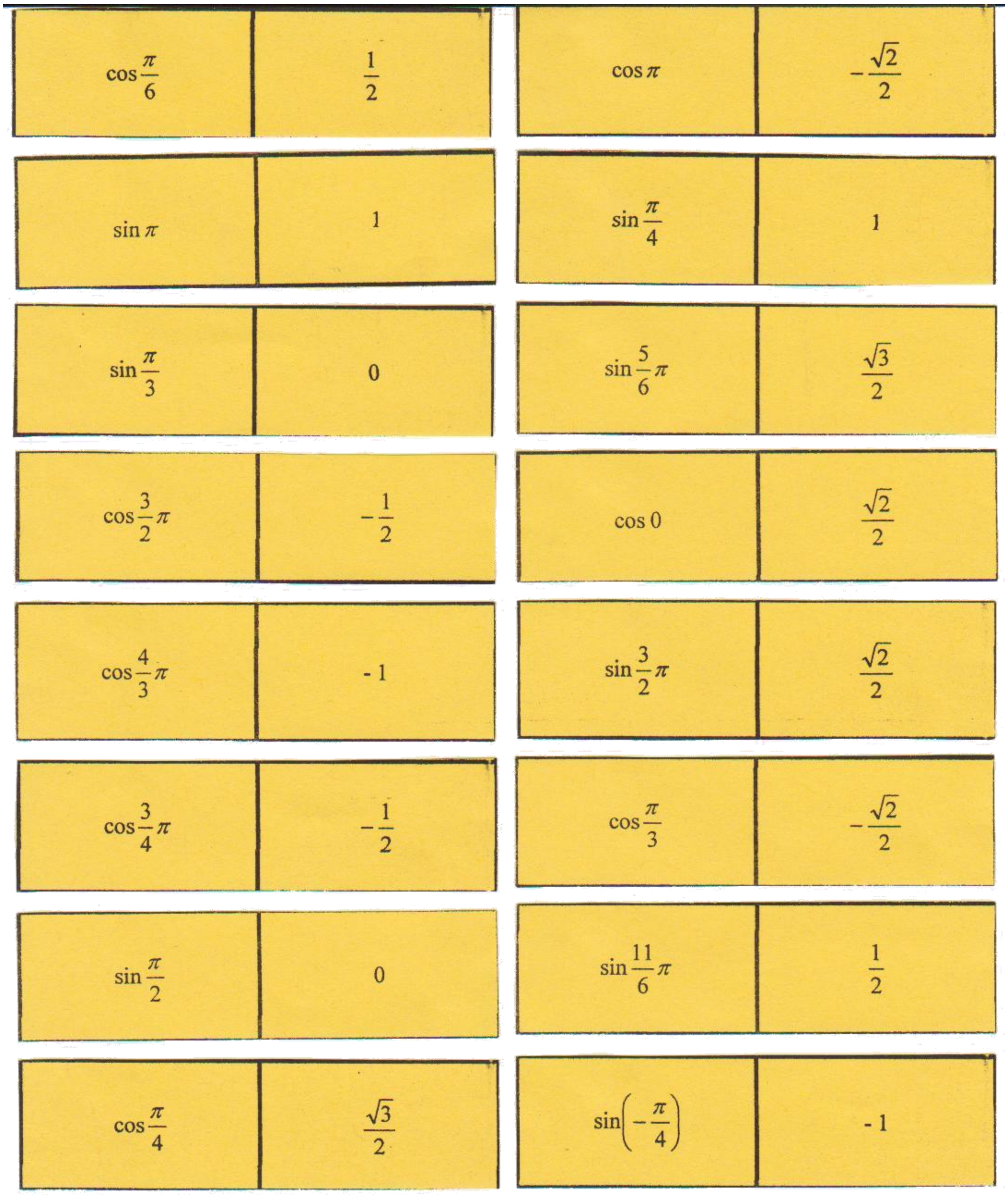
2.3.3 Domino

Domino je veľmi známa hra, čierne drevené doštičky so striebornými očkami (či dnes skôr farebné umelohmotné) sú iste v mnohých domácnostiach, kde majú deti. Do Európy sa domino dostalo pomerne nedávno, až v 18. storočí, ale na Ďalekom východe má omnoho staršiu tradíciu. Jednu sadu tvorí 28 hracích kameňov. V tomto variante hry na dominových kameňoch však nie sú body, ale príklady na výpočet hodnôt goniometrických funkcií spamäti.

Pravidlá: Hru hrajú dvaja alebo viacerí hráči. Kartičky s príkladmi sa zamiešajú, jedna sa položí na stôl lícom nahor, ostatné sa rozdajú medzi hráčov po 3-5 kartičiek, zvyšné tvoria zálohu. Potom sa hráči striedajú a prikladajú kartičky podľa týchto pravidiel:

1. Kartičky sa môžu k sebe prikladať iba políčkami, ktoré dávajú rovnaký výsledok.
2. Každá ďalšia kartička môže byť priložená iba na jeden či druhý koniec radu.
3. Hráč, ktorý nemôže priložiť vhodnú kartičku, smie si vziať jednu kartičku zo zálohy.
4. Po vyčerpaní zálohy hra pokračuje ďalej. Kto priloží k radu poslednú zo svojich kartičiek, zvolá „domino“ a stáva sa víťazom.

Pomôcky: kartičky s príkladmi

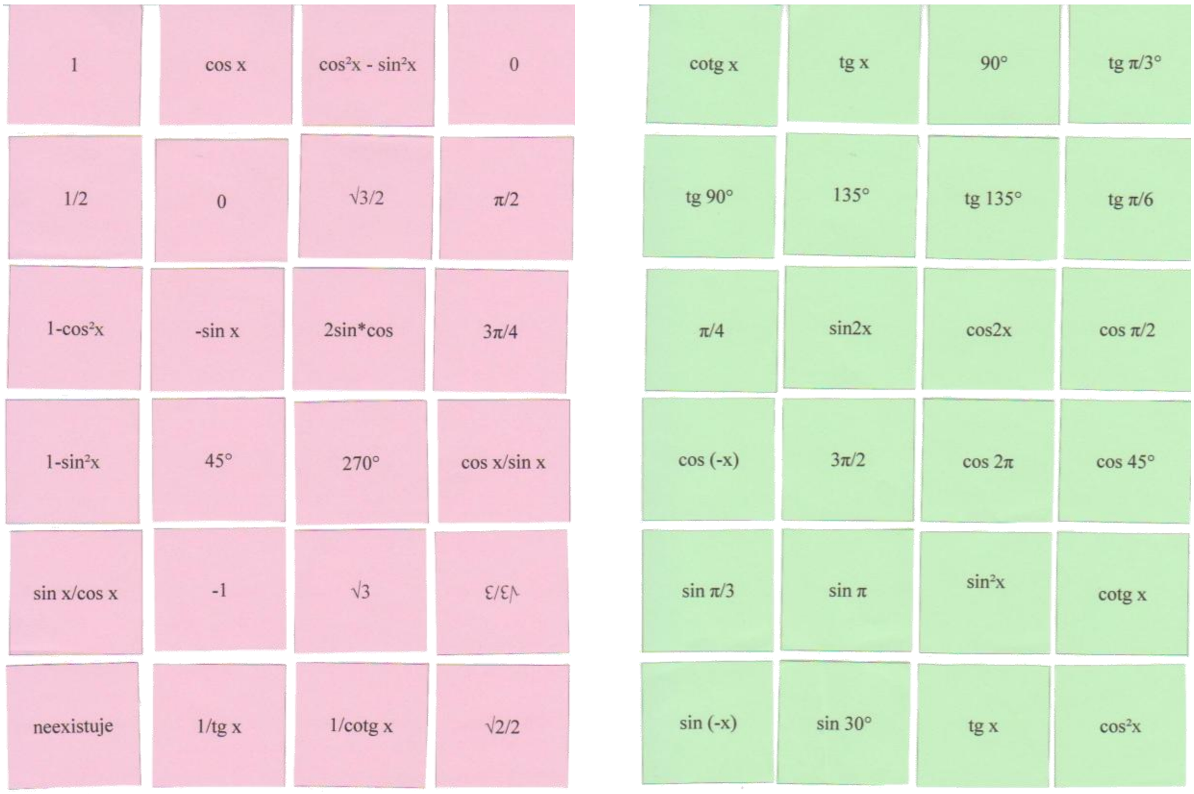


Obrázok 7 Domino

2.3.4 Pexeso

Pexeso je známa kartová hra pre deti, rozvíjajúca najmä pamäť. V našej verzii hry však na hracích kartách nie sú jednoduché obrázky, vždy na dvoch kartách rovnaké. Naše karty sú každá iná, sú však spárované do dvojíc príklad – výsledok.

Pomôcky: sady kartičiek



Obrázok 8 Pexeso

Pravidlá: Hru hrajú 2 až 6 hráči. Karty sa zamiešajú a rozložia na stole lícom nadol. Každý hráč obráti v jednom kole dve karty. Pokiaľ tvoria dvojicu k sebe patiacu, karty odoberie a pokračuje v hre otočením ďalších dvoch kariet. Ak karty, ktoré otočil, nepasujú k sebe, otočí ich naspäť lícom nadol a pokračuje ďalší hráč. Keď sú všetky dvojice nájdené, vyhráva ten hráč, ktorý našiel najviac odpovedajúcich dvojíc.

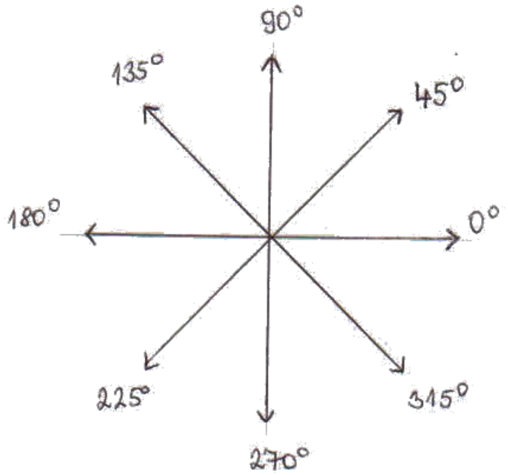
Skúsenosti: Žiačky, ktoré pripravili toto pexeso, doňho dali nielen hodnoty goniometrických funkcií, ale aj základné vzťahy, ktoré platia medzi goniometrickými funkciami. A tak okrem rozvíjania pamäti poslúžila táto hra veľmi dobre na zopakovanie učiva. Aby to však spolužiakom trochu uľahčili, vytlačili obe polovice pexesa na papier inej farby. A tak žiaci vedeli, že druhú kartičku majú hľadať na papieri druhej farby.

2.4 Nebezpečné územie

Pri zavádzaní goniometrických funkcií je potrebné pracovať s uhlami v stupňovej aj oblúkovej miere, znázorňovať ich na jednotkovej kružnici. Nasledujúca hra bola vytvorená za účelom jednoduchého precvičovania týchto zručností.

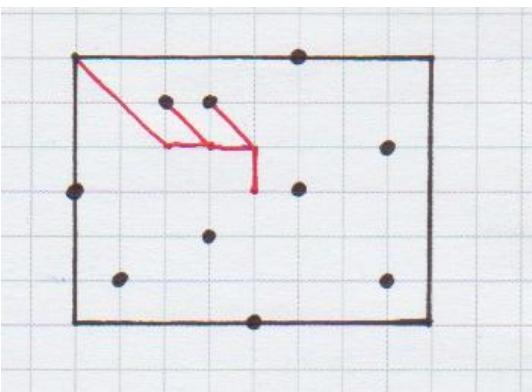
Pomôcky: štvorčekový papier, pero

Pravidlá: Každý hráč si pripraví hracie pole 6 x 8 políčok. Jeden z hráčov si na svoje pole umiestni desať prekážok tak, aby ich súper nevidel. Prekážky sa umiestňujú na priesečníky strán štvorčekov (aj po obvode hracieho poľa), pričom v žiadnom riadku alebo stĺpci nesmú byť viac než dve prekážky.
Druhý hráč sa snaží dostať z východzieho bodu v strede hracieho poľa do cieľa, ktorým je ľubovoľný vrchol hracieho plánu (sú teda štyri možné cieľové body). V jednom ťahu hráč postupuje o jeden štvorček (vodorovným, zvislým alebo uhlopriečnym smerom) a zakaždým nahlási súperovi smer postupu. Na udanie smeru má osem možností, ktoré udáva veľkosťou uhla pohybu (učiteľ môže rozhodnúť, či sa budú uhly určovať v stupňovej alebo v oblúkovej miere).



Obrázok 9 Povolené smery pohybu

Ak hráč narazí na prekážku, musí sa vrátiť. Na nasledujúcom obrázku je ukážka hernej situácie, keď hráč najprv hlásil pohyb o 90° a 135°. Tu však narazil na prekážku, preto sa vrátil a hlásil 180° a 135°. Opäť narazil na prekážku, vrátil sa a po ťahoch 180°, 135° a 135° dorazil do cieľa. Potreboval na to 7 ťahov. Potom si hráči vymenia úlohy a víťazom je ten, kto na cestu do cieľa potreboval menej ťahov.



Obrázok 10 Ukážka hry

3 MATEMATICKÉ HRY

Medzi didaktické hry, využívané na hodinách matematiky, zaraďujeme aj tzv. **matematické hry**. V našom ponímaní ich vymedzíme pomocou šiestich charakteristických znakov (Burjan – Burjanová, 1991, s. 9-10). Prvých päť je všeobecných – tieto popisujú pomerne širokú triedu hier, do ktorej patria aj mnohé spoločenské hry (šach, dáma) a kartové hry (Bridge, Canasta). Šiesty znak vyčleňuje spomedzi nich tie hry, ktoré budeme nazývať matematickými.

1. Hry sa zúčastňujú dvaja alebo viacerí hráči.
2. Činnosť hráčov prebieha striedavo.
3. Konanie každého z hráčov je bezprostredne ovplyvnené konaním ostatných.
4. Zásahy hráčov do hry sú presne vymedzené pravidlami v podobe povolených ťahov.
5. Každý z hráčov sa usiluje dosiahnuť cieľ, ktorý mu hra predpisuje. Ciele jednotlivých hráčov sú protichodné.
6. Hru považujeme za matematickú, ak nastáva niektorý z nasledovných prípadov:
    a) pravidlá obsahujú isté matematické pojmy,
    b) na vykonanie predpísaných ťahov sú potrebné isté matematické znalosti,
    c) kombinačné a najmä kauzálne úvahy umožňujú takú analýzu hry, z ktorej vyplýva pre niektorého z hráčov optimálna stratégia alebo aspoň čiastočný návod na výhru.

Treba poznamenať, že je ťažké presne vymedziť, ktorú hru máme považovať za matematickú a ktorú nie. Za "rýdzomatematické" možno považovať hry spĺňajúce body 6a), 6b) a tie, u ktorých je známa pre niektorého z hráčov optimálna stratégia. Z ostatných hier sem zaraďujeme tie, u ktorých je reálny predpoklad, že sa kauzálnymi úvahami, prípadne efektívnym prebratím možností podarí optimálnu stratégiu objaviť.

Rozdelenie matematických hier podľa optimálnej stratégie

V každej hre má hráč viac možností, ako do hry zasiahnuť. Ak chce konať racionálne, musí si všetky možnosti premyslieť a zvoliť presný plán konania. Každý plán konania hráča v hre, ktorý nemôže byť narušený činnosťou súperov, sa v teórii hier nazýva stratégia.

Pod **optimálnou stratégiou** rozumieme postup, ktorý zabezpečuje hráčovi najlepší možný výsledok v prípade, že jeho súper sa bude v partii riadiť svojou optimálnou stratégiou. V istých prípadoch je optimálna stratégia niektorého z hráčov vyhrávajúca. Vtedy môže druhý z hráčov remizovať alebo vyhrať iba pri chybe súpera.

Z hľadiska optimálnej stratégie možno matematické hry rozdeliť nasledovne (podľa Burjan-Burjanová, 1991, s.11):

– **hry s kauzálnou optimálnou stratégiou** – v týchto hrách je známa vyhrávajúca stratégia pre niektorého z hráčov. Objavenie takejto stratégie je možné iba cestou logických úvah, preto sú takéto hry z hľadiska výuky matematiky zvlášť cenné.

- **hry s realizovateľným stromom logických možností** – v prípade, že hra pripúšťa pomerne malý počet pozícií a rôznych kombinácií, je možné dopracovať sa k množine vyhrávajúcich pozícií systematickým prebratím potrebného množstva konkrétnych príkladov.
- **neprehľadné hry** – vzhľadom k veľkému počtu možností a kombinácií nie sú prístupné systematickému rozboru. Často do poslednej chvíle nie je jasné, kto vyhrá.
- **hry takticky zvládnuteľné** – tešia sa u žiakov veľkej obľube. Hoci nie je známa optimálna stratégia, dlhším tréningom možno objaviť určité zákonitosti a vytipovať vhodné a nevhodné ťahy.

Využitie matematických hier

Okrem možnosti využiť matematické hry vo sfére motivácie, je možné ich využitie na vyučovacej hodine aj s jedným z konkrétnych didaktických cieľov (Burjan, 1984, s. 77-81):

a) **upevnenie nového pojmu** - po prebratí nového pojmu je potrebné ho precvičiť, t.j. dať žiakom príležitosť s ním narábať, používať ho, objavovať jeho vlastnosti. Jednou z možností je naučiť ich hru, v ktorej hrá nový pojem ústrednú úlohu a pri hraní sa s ním narába.
b) **propedeutika pojmov** - príprava pre objav nového pojmu napríklad z teórie grafov,
c) **ilustrácia pojmu alebo metódy** - napr. izomorfizmus, nekonštruktívny, existenčný dôkaz,
d) **aplikácia metódy alebo kalkulu** - napr. invarianty, kódovanie do dvojkovej sústavy,
e) **trénovanie rôznych kognitívnych funkcií** - napr. priestorovej predstavivosti.

V tejto práci sme sa zamerali na prvú možnosť didaktického využitia matematických hier. V tabuľke na strane 6 sú hry priradené tématickým celkom, v ktorých môžu poslúžiť na upevňovanie nového pojmu a precvičovanie učiva. Keďže podľa rámcových učebných osnov už rozdelenie počtu hodín matematiky (a tým aj učiva) v Štátnom vzdelávacom programe do jednotlivých ročníkov nie je záväzné, neuvádzame rozdelenie hier podľa ročníkov.

Zaraďovaním hier do vyučovacieho procesu sledujeme aj niekoľko ďalších cieľov:

- posilnenie komunikácie o matematike medzi žiakmi a rozvíjanie schopnosti tímovej práce - pri turnaji družstiev je v záujme spoločného víťazstva, aby žiaci medzi sebou o hre komunikovali a naučili ju všetkých členov družstva,
- povzbudenie slabších žiakov - vhodne zvolená neprehľadná hra dáva možnosť vyniknúť aj slabším žiakom, ktorí inak v matematike zaostávajú,
- oboznámenie sa s novými žiakmi, podchytenie žiakov s výbornými kombinačnými schopnosťami - hry na začiatku školského roka,
- hra ako odmena za dobrú prácu - zaradenie hier na Deň študenstva, poslednú hodinu pred vianočnými a letnými prázdninami a pod.

Zoznámenie sa s novou hrou v žiakoch spravidla vyvoláva túžby hru si hneď vyskúšať. Preto nasleduje čas na prípravu, ktorý považujeme za najdôležitejšiu časť hodiny - žiaci v ľubovolných skupinkách hru hrajú, vnikajú do nej, analyzujú ju, snažia sa nájsť optimálnu stratégiu a vyhrať nad súperom. Pritom však aktívne narábajú s ústredným pojmom, na ktorý je hra zameraná a tak vlastne plnia ciele hodiny - upevnenie vzťahu k matematike, intenzívne prežívanie radosti z hry i z objavu, rozvíjanie logického myslenia a rozumových schopností a v neposlednom rade precvičenie nového pojmu. Zároveň sa v priebehu zohrávky upresňujú pravidlá a riešia spory, ktoré medzi žiakmi vzniknú. Niekedy nasleduje turnaj, ktorý vystupňuje súťaživú klímu, inokedy sa len venujeme rozboru hry a riešeniu problémov. Pracovnú klímu, ktorá na hodinách vzniká, sa snažíme využiť aj ďalej - k niektorým hrám sme pripravili na ne nadväzujúce prémiové úlohy. Tieto žiaci riešia buď priamo na hodine alebo doma, písomne a získavajú za ne body do celkového hodnotenia.

3.1 Zakázané delitele

Túto hru je vhodné zaradiť v období, kedy žiaci na hodinách matematiky preberajú pojem deliteľ čísla.

Zdroj: Burjan – Bero – Černek, 1991, s. 44

Pomôcky: tabuľa a krieda, resp. pero a papier

Pravidlá: Dvaja hráči striedavo píšu na tabuľu prirodzené čísla neprevyšujúce vopred dané číslo $n \in N$. Pritom je zakázané napísať deliteľa niektorého z čísel na tabuli. Prehráva hráč, ktorý už nemôže napísať žiadne číslo.

Skúsenosti: Po vysvetlení pravidiel hry dvaja dobrovoľníci z radov žiakov odohrali ukážkový zápas na tabuľu, aby sa ozrejmili pravidlá hry. Potom žiaci vo dvojiciach odohrali v laviciach po dva zápasy (raz začínal jeden žiak, raz druhý). Výsledky nahlásili učiteľovi, ktorý im za víťazstvá zapísal body do priebežného hodnotenia. Na niekoľkých nasledujúcich vyučovacích hodinách bola hra použitá ako krátka rozcvička na začiatku hodiny – po príchode do triedy učiteľ vyvolal jedného žiaka, ktorý si zvolil a na tabuľu zapísal číslo n. Potom vyvolal k tabuli niektorého svojho spolužiaka, aby zapísal prvé číslo v hre. Ten potom opäť vyvolal niekoho k tabuli a tak hra pokračovala. Kontrolu správnosti zapísaných čísel vykonávali všetci žiaci. A tak kým učiteľ zapisoval do triednej knihy, žiaci sa hravou formou naladili na problematiku deliteľnosti čísel. V prípade, že žiaci sú hĺbavejší a o problematiku prejavia záujem, je možné venovať sa aj hľadaniu stratégie tejto hry.

Stratégia: Existenciu vyhrávajúcej stratégie pre prvého hráča dokážeme sporom: Predpokladajme, že pre každý úvodný ťah prvého hráča pozná druhý hráč postupnosť ťahov vedúcu k jeho výhre. Označme p číslo, ktoré by druhý hráč napísal na tabuľu (v rámci svojej vyhrávajúcej stratégie) v prípade, že by prvý hráč napísal ako prvé číslo 1. Potom by začínajúci hráč mal nasledujúcu vyhrávajúcu stratégiu: Napíše ako prvé číslo p a v ďalšom sa drží vyhrávajúcej stratégie druhého hráča. Toto je možné, pretože číslo 1 už nebude môcť byť napísané na tabuľu (je deliteľom čísla p). Dospeli sme k sporu - z predpokladu, že existuje vyhrávajúca stratégia pre druhého hráča, sme odvodili, že

potom existuje aj pre prvého. Náš predpoklad bol teda nesprávny. Vyhrávajúca stratégia musí existovať pre prvého hráča.
Takýto druh dôkazu sa nazýva existenčný. Logicky sme dokázali, že stratégia pre prvého hráča musí existovať, ale z dôkazu sa nedozvedáme nič o tom, ako vyzerá. Preto je vhodné žiakom ponúknuť prémiové úlohy na konštruktívne hľadanie konkrétnych stratégií.

Prémiová úloha: Konštruktívne opíšte vyhrávajúcu stratégiu začínajúceho hráča pre

a) $n = 6$,
b) $n = 10$.

Riešenie:

a) V prvom ťahu hráč napíše na tabuľu číslo 6. V ďalšom už možno písať na tabuľu len čísla 4 alebo 5. Jedno z nich napíše druhý hráč a zvyšné prvý hráč, ktorý si tým zabezpečí víťazstvo.
b) Aj v tomto prípade začne hráč číslom 6. V ďalšom potom možno písať na tabuľu len čísla 4, 5, 7, 8, 9, 10. Utvorme z nich tri páry: [4, 5], [8, 10], [7, 9]. Prvý hráč bude odpovedať na ťahy súpera tým, že vždy napíše číslo z tej istej dvojice, z ktorej je číslo napísané súperom. Pritom dvojica čísel [4, 5] nemôže byť použitá v prípade, ak pred ňou už bola použitá dvojica čísel [8, 10].

3.2 Počet deliteľov

Hra bola vymyslená ako nenásilná motivácia činnosti „hľadanie deliteľov daného čísla".

Zdroj: Vankúš, 2010, s. 43

Pomôcky: pero, papier

Pravidlá: Počas hry žiaci vo svojom ťahu odpočítavajú od počiatočného prirodzeného čísla *n* (napr. *n* = 30) ľubovoľné prirodzené číslo od 1 po 5. Po odpočítaní hráč zistí, koľko deliteľov má vzniknuté číslo; počet deliteľov určuje počet bodov, ktoré hráč za svoj ťah získa. Ak teda napr. začal prvý hráč ťahom 30 $\rightarrow$ 28, zapíše si 6 bodov, pretože číslo 28 má 6 deliteľov (1, 2, 4, 7, 14, 28). Hráči sa striedajú v ťahu, až kým nedostanú číslo 0. Hráč, ktorý v priebehu hry získa viac bodov, vyhráva. V ďalšej hre si žiaci vymenia poradie, v ktorom začínali a získané body sa v závere spočítajú.

3.3 Stymie

Hru vymyslel v roku 1971 David L. Silverman. Hráva sa v dvoch verziách. Jej cieľom je jednoduchou formou precvičiť pojem prvočíslo.

Pomôcky: pero, papier

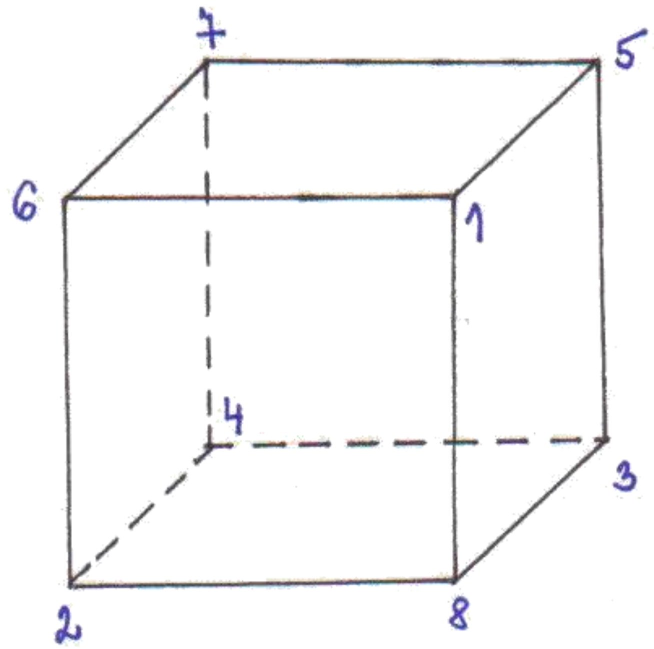
Zdroj: Angiolino, 2000, s. 108

Pravidlá: Dvaja háči si na papier nakreslia trojrozmernú kocku.
Verzia A: Hráči striedavo pripisujú k voľným vrcholom kocky čísla od 1 po 8 (každé môžu použiť len raz) tak, aby súčet čísel spojených hranou bol prvo číslo. Hráč, ktorý nemá možnosť pokračovať, prehráva.

Stratégia: Existuje optimálna stratégia pre druhého hráča, ktorá ho po štyroch ťahoch privedie k víťazstvu. Ak prvý hráč napíše k ľubovoľnému vrcholu kocky párne číslo, musí druhý hráč použiť akékoľvek nepárne číslo a naopak. Toto číslo musí napísať k vrcholu jednej zo stien, na ktorú napísal svoje číslo prvý hráč, pričom musí číslo pripísať k vrcholu protiľahlému k vrcholu, ktorý predtým využil prvý hráč. Táto taktika je založená na skutočnosti, že okrem dvojky sú všetky prvočísla nepárne. To znamená, že dve čísla na koncoch jednej hrany musia dávať nepárny súčet, ak to má byť prvočíslo. Jedno z nich teda musí byť nepárne a druhé párne. Takže ak sa objavia v protiľahlých vrcholoch jednej steny jedno párne a jedno nepárne číslo, nemôžu už byť zvyšné dva vrcholy tejto steny použité.
Objavenie tejto stratégie nie je náročné, rozhodujúcim momentom je uvedomenie si významu parity čísel.

Prémiová úloha: Pripíšte k vrcholom kocky čísla od 1 po 8 tak, aby súčet štyroch čísel patriacich k jednej stene bol prvočíslo.

Žiacke riešenie:



Obrázok 11 Riešenie prémiovej úlohy

Verzia B: Iným variantom tejto hry je pripisovanie čísel od 1 do 12 k hranám kocky tak, aby súčet troch čísel ležiacich na hranách zbiehajúcich sa do jedného vrcholu bol opäť prvočíslo. Prvočísla, ktoré sa v tejto verzii hry môžu vyskytnúť ako súčet sú 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29 a 31.

3.4 ROVNICE

Sústava dvoch lineárnych rovníc s dvoma neznámymi je dôležitým pojmom v učive algebry. Nasledujúca hra žiakov motivuje k tomu, aby k zisteniu, či sústava má alebo nemá riešenie, hľadali jednoduchšiu cestu než vyriešiť danú sústavu. Navyše si musia uvedomiť rozdiel medzi tým, keď sústava má jediné riešenie a keď má nekonečne veľa riešení.

Zdroj: Burjan-Burjanová, 1991, s. 57

Pomôcky: pero, papier

Pravidlá: Hru hrajú dvaja hráči, ktorí striedavo dopĺňajú reálne koeficienty a, b, c, d, e, f (v ľubovoľnom poradí) do sústavy rovníc:

$$ax + by = c$$
$$dx + ey = f$$

Ak po doplnení všetkých koeficientov má táto sústava rovníc v *R* x *R* riešenie, vyhráva prvý hráč. Inak vyhráva druhý hráč. Ciele hráčov môžu byť aj vymenené.

Stratégia: Existuje kauzálna optimálna stratégia pre druhého hráča. Na každý ťah prvého hráča odpovie doplnením odpovedajúceho koeficientu v druhej z rovníc tak, aby platilo $a = d, b = e$. Pritom ak chce, aby sústava nemala riešenie, doplní koeficient c resp. f tak, aby $c \neq f$. Ak sa ale druhý hráč usiluje o to, aby sústava mala riešenie, doplní $c = f$, čím vlastne vzniknú dve rovnaké rovnice a takáto sústava bude mať nekonečne veľa riešení.

Skúsenosti: Žiakov hra zaujala, po niekoľkých partiách došli k záveru, že 2. hráč vyhrá a viacerí to vedeli aj vysvetliť. Iba pre najslabších žiakov bola hra "osudová" - nevedeli využiť vzťahy medzi koeficientami rovníc, ktoré sa rozoberali na vyučovacích hodinách. To poukazuje na to, že tieto vzťahy si osvojili iba mechanicky a neboli schopní aplikovať ich v tejto netradičnej situácii. Preto sme venovali čas rozboru tejto problematiky, na tabuľu napísali všetky možné situácie. Vzájomnou diskusiou žiakov sa napokon podarilo objasniť úplnú stratégiu pre druhého hráča. Nasledovali prémiové úlohy.

Prémiová úloha č. 1: V hre nastala takáto situácia:

$$3x + 2y = c$$
$$dx + 4y = 5$$

Čo má robiť 1. hráč ak chce, aby sústava

a) mala riešenie
b) nemala riešenie?

Žiacke riešenia:

a) Žiaci začali o probléme spoločne diskutovať. Na vyhrávajúci ťah $c = 2{,}5$ prišli sami a uspokojili sa s týmto jedným riešením úlohy. Až po dlhšom navádzaní, aby hľadali aj ďalšie možnosti, prišli na riešenie $d \neq 6$. To jasne poukazuje na to, že celá ich predchádzajúca stratégia nevyužívala prípad, ak má sústava rovníc jediné riešenie.

b) Hneď usúdili, že výhru nemajú zaručenú, môžu však vyhrať, ak dajú oni $d = 6$, súper $c \neq 2{,}5$ alebo ak oni dajú $c \neq 2{,}5$ a súper $d = 6$. Na otázku, ktorú z týchto možností by si zvolili, správne odpovedali - prvú, pretože ak súper nepozná stratégiu, je veľká pravdepodobnosť, že napíše $c \neq 2{,}5$.

Šikovným žiakom môžeme predostrieť aj náročnejšie prémiové úlohy (zdroj Burjan – Bero – Černek, 1991, s. 45, s. 186):

Prémiová úloha č. 2:

Dvaja hráči striedavo dopĺňajú koeficienty v sústave

$$ax + by + cz = 0$$
$$dx + ey + fz = 0$$
$$gx + hy + iz = 0$$

Ak po doplnení všetkých koeficientov bude mať sústava nenulové riešenie (t.j. také, že $x^2 + y^2 + z^2 > 0$), vyhrá prvý hráč, inak vyhrá druhý. Dokážte, že pre prvého hráča existuje vyhrávajúca stratégia a opíšte ju.

Stratégia: Prvý hráč môže dosiahnuť, aby sústava mala riešenie $x = 0, y = 1, z = -1$. Prvým ťahom nahradí ľubovoľne jeden z koeficientov *a, d, g*. Počas ďalšej hry vie dosiahnuť, že bude *c = b, f = e, i = h*.

Prémiová úloha č. 3:

Dvaja hráči striedavo dopĺňajú koeficienty v sústave

$$x + ay + bz = c$$
$$x + dy + ez = f$$
$$x + gy + hz = i$$

Dokážte, že začínajúci hráč môže dosiahnuť, aby sústava nemala riešenie.

Stratégia: Začínajúci hráč doplní prvým ťahom ľubovoľne koeficient *c*. Potom rozdelí zvyšné koeficienty do dvojíc. V ďalšom ťahu vždy doplní koeficient z tej istej dvojice ako súper. Pritom postupuje tak, aby platilo *d = g, e = h* a aby práve jedno z čísel *f, i* bolo rôzne od nuly. Je zrejmé, že splnenie týchto podmienok vie dosiahnuť. Potom sústava nebude mať riešenie, pretože druhá a tretia rovnica budú mať rovnakú ľavú stranu, ale rôzne pravé strany.

Prémiová úloha č. 4

Daná je sústava siedmich rovností:

$$* + * + * + * + * + * + * = *$$

$$* + * + * + * + * + * = *$$

$$* + * + * + * + * = *$$

$$* + * + * + * = *$$

$$* + * + * = *$$

$$* + * = *$$

$$* = *$$

Dvaja hráči striedavo nahrádzajú hviezdičky ľubovoľnými reálnymi číslami. Dokážte, že začínajúci hráč môže dosiahnuť, aby nakoniec všetky rovnosti platili.

Stratégia: O tom, či rovnosť bude platiť, rozhoduje ten z hráčov, ktorý v nej nahrádza poslednú hviezdičku. Prvý hráč si vie zabezpečiť, že to bude vždy on nasledujúcim spôsobom: prvým ťahom musí nahradiť (ľubovoľne) hviezdičku v niektorej v troch rovností obsahujúcich nepárny počet hviezdičiek. Potom zostanú len dve rovnosti s nepárnym počtom hviezdičiek. Ak druhý hráč nahradí niektorú hviezdičku v jednej z rovností s párnym počtom hviezdičiek, vzápätí v tej istej rovnosti nahradí hviezdičku aj prvý hráč. Keď počas hry druhý hráč nahradí hviezdičku v rovnosti s nepárnym počtom hviezdičiek, prvý hráč vzápätí nahradí ľubovoľnú hviezdičku v druhej rovnosti s nepárnym počtom hviezdičiek.

3.5 Fibonacci-Nim

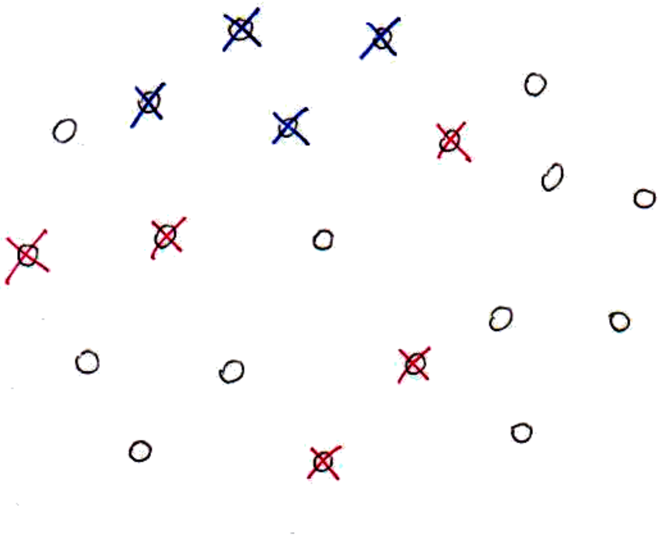
Názov tejto hry je odvodený od toho, že k víťazstvu podľa optimálnej stratégie je potrebné poznať členy Fibonacciho postupnosti. Tú tvoria čísla 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55 a tak ďalej – každé ďalšie číslo je vždy súčtom dvoch predchádzajúcich čísel.

Zdroj: Angiolino, 2000, s. 45

Pomôcky: papier, pero

Pravidlá: Hru hrajú dvaja hráči. Na papier ľubovoľne rozmiestnia ľubovoľný počet bodov. Prvý hráč pri prvom ťahu preškrtne toľko bodov, koľko chce, musí však nechať aspoň jeden. Druhý hráč potom môže tiež preškrtnúť, koľko bodov chce, avšak nie viac než dvakrát toľko, než predtým preškrtol jeho súper. Striedavo takto pokračujú ďalej. Obaja hráči môžu preškrtnúť ľubovoľný počet bodov, avšak nikdy nie viac než dvakrát toľko, koľko pri predchádzajúcom ťahu preškrtol ich súper.

Ukážka: Na začiatku máme 20 bodov. Adam škrtne 4 – ostáva ich 16. Boris ich nesmie preškrtnúť viac ako 8 – rozhodne sa škrtnúť 5 bodov. Ostáva teda 11 bodov – situácia je znázornená na obrázku:



Obrázok 12 Ukážka hry Fibonacci-Nim

Adam nesmie škrtnúť viac ako 10 – preškrtne 1 a ostáva ich 10. Boris nesmie škrtnúť viac ako 2 – škrtne teda presne 2 a ostáva ich 8. Adam škrtne 2, ostáva ich 6. Boris škrtne 1, ostáva 5. Adam škrtne 1, zvyšok tvoria 4 body. Boris škrtne tiež 1, ostávajú 3. Adam škrtne 1, ostávajú 2. Boris ich oba škrtne a zápas vyhráva.

Stratégia: Aby hráč vyhral, musí rozložiť počet daných bodov na súčet čísel Fibonacciho postupnosti – odčíta najväčšie možné číslo a potom rovnakým spôsobom aj nasledujúce čísla. Napríklad ak máme 20 bodov, rozloží ich na 13 + 5 + 2. Potom musí hráč škrtnúť najnižší počet bodov, ktoré mu tieto čísla ponúkajú: v našom prípade 2 body. Túto taktiku môže použiť vždy okrem situácie, keď počet bodov predstavuje niektoré z čísel Fibonacciho postupnosti. To zabráni prvému hráčovi vo výhre. Z toho vyplýva, že ak začína hra s počtom bodov, ktoré nie je z Fibonacciho postupnosti, vyhráva za použitia tejto stratégie zaručene prvý hráč. Ak je začiatočný počet bodov číslom z Fibonacciho postupnosti a prvý hráč nepozná túto stratégiu, môže na ňu druhý hráč prejsť hneď po prvom súperovom ťahu a vyhrať.

Skúsenosti: Hra je náročná na objavenie stratégie, žiaci obvykle nájdu niekoľko výhodných ťahov ku koncu hry, ale nie celú stratégiu.

4 INDÍCIE Z HISTÓRIE

Osudy veľkých matematikov sú vďačnou témou na spestrenie vyučovacích hodín. V závislosti od toho, akú časť učiva práve preberáme, môžeme žiakom priblížiť život viacerých osobností od starovekého Grécka až po súčasnosť. Samotné rozprávanie by nemalo byť len suchopárnym prehľadom životopisných údajov alebo presne formulovaných matematických výsledkov. Sústredíme sa aj na povahové črty slávnych matematikov, na ich prínos pre vývoj vedy, priblížime obdobie, v ktorom žili. Matematické objavy prezentujeme v prístupnej forme a v širších súvislostiach. Prínosy, ktoré by takéto rozprávania žiakom mali priniesť (Ševerová a kol., 2005, s. 127):

– Matematika sa žiakom prestáva javiť ako zbierka mŕtvych faktov, poučiek, vzorcov a metód. Približujeme im ju ako dynamickú, vyvíjajúcu sa vedu. Vidia jej víťazstvá, ale aj krízové obdobia. Nové poznatky sa prezentujú ako výsledky snaženia nadaných jedincov a nadaní jedinci ako skutoční ľudia, nielen slávne mená. Mnoho žiakov sa na matematiku pozerá ako na čiernu mágiu, kúzelníctvo alebo aspoň ako na súkromný majetok učiteľa a autorov učebníc. Dôsledkom toho môže byť ustráchaný, osudový prístup k nej. Pohľad do zákulisia matematiky, na proces jej tvorby môže tento postoj odstrániť alebo zmeniť.
– Pútavé rozprávanie, vyzdvihnutie kladov niektorého vedca môže v žiakovi vyvolať snahu dosiahnuť, alebo sa priblížiť k jeho kvalitám, stáva sa jedným z jeho vzorov. Nemusí tu ísť len o matematické znalosti a schopnosti, ale aj o vzťah k práci a štúdiu, k ľuďom, ktorí ho obklopovali, k spoločnosti, v ktorej žil. Pokiaľ v dobrej besede ukážeme matematiku ako skutočné dobrodružstvo poznania, ako tvorivý proces, môžu žiaci zatúžiť aktívne sa do tejto práce v budúcnosti zapojiť.
– Žiaci získavajú určitý nadhľad nad matematikou, pocit lepšej celkovej orientácie. Okrem iného tým docielime rast ich matematického sebavedomia, ktoré značne zvyšuje výkonnosť a úspešnosť ich práce.

Kvalitné podklady pre rozprávanie nájdeme v mnohých knihách, dobrým pomocníkom je aj internet.

V prípade, že sme žiakov počas štúdia zoznamovali s osudmi slávnych matematikov, môžeme vyskúšať aj nasledujúcu hru, ktorú sme nazvali **Indície z histórie**. Pôvodne bola vytvorená pre medziškolskú matematickú súťaž, môže sa však využiť aj ako triedna či medzitriedna súťaž. Úlohou súťažiacich družstiev je postupne uhádnuť mená 10 slávnych matematikov na základe indícií – básničiek, textov a obrázkov, ktoré sa žiakom odhaľujú postupne podľa týchto pravidiel:

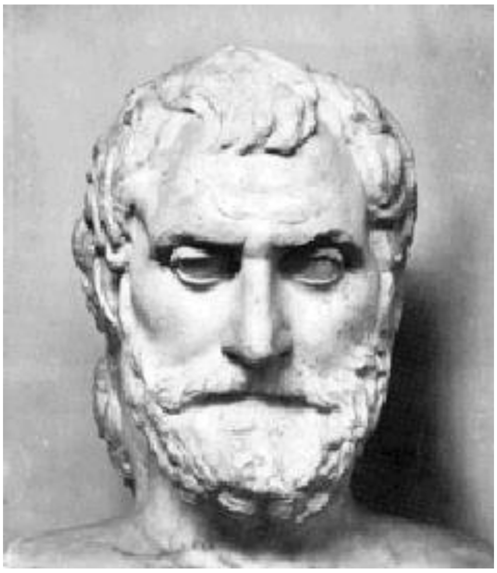
1. indícia obsahuje krátku básničku, štvorveršie, narážajúce na danú osobnosť. Za správnu odpoveď získa družstvo 4 body, za nesprávnu 0 bodov. Ak si súťažiaci nie sú istí odpoveďou, môžu sa rozhodnúť neodpovedať a pokračujú druhou indíciou.
2. indícia obsahuje stručné informácie zo života hľadaného matematika, ako aj jeho portrét. Ak sa družstvo rozhodne odpovedať, za správnu odpoveď získa už len 3 body.
3. indícia popisuje, čomu sa daná osobnosť venovala. Spomínajú sa niektoré objavy alebo aj diela – za správnu odpoveď sú 2 body.
4. indícia obsahuje matematickú vetu alebo fyzikálny zákon, nesúci meno hľadaného matematika. Zároveň je to posledná možnosť (za 1 bod) pre tých, čo ešte neskúsili uhádnuť to správne meno. Pomôcť im môže aj pripojený obrázok.

Nakoľko v minulosti matematici často vynikali aj v iných odboroch, môžu ich žiaci spoznať aj ako známych fyzikov, prípadne astronómov alebo filozofov. A tak v rámci medzipredmetových vzťahov využijú svoje vedomosti aj z iných predmetov.
Zdroje k vytvoreniu týchto indícií sme čerpali najmä v literatúre – Bero, 1989; Borec, 1989; Folta – Nový, 1981; Znám, 1981. Básničky boli zverejňované v časopise Relax v deväťdesiatych rokoch minulého storočia, niektoré sme vytvorili sami. Internetové zdroje použitých obrázkov sú uvedené v závere tejto práce. Na nasledujúcich stranách predkladáme čitateľom indície o 10 matematikoch, ktorí sú zoradení postupne podľa obdobia, v ktorom žili.

Táles

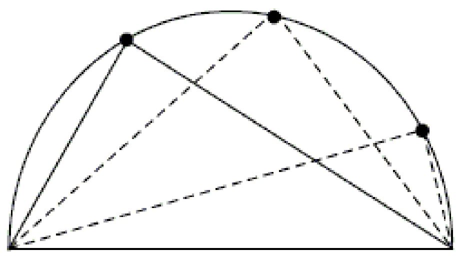
1. 90º stále
   omieľal do kruhu.
   Nad priemerom trčal...,
   veda šla mu k duhu.

2. Tento slávny grécky astronóm, filozof a geometer pochádzal z Milétu. Narodil sa v roku 624 p.n.l., zomrel v roku 547 p.n.l. Počas svojho pobytu v Egypte prišiel do styku s egyptskou kňažskou kastou a priniesol si odtiaľ mnoho vedeckých znalostí. Spolu s Anaximandrom, Anaximénom, Anaxagorom a ďalšími patril medzi iónskych prírodných filozofov milétskej školy, ktorí sa pokúšali naivne materialisticky vysvetliť prírodné javy.



3. Meral výšku egyptských pyramíd na základe podobnosti trojuholníkov a nameranej dĺžky tieňa. Sformuloval prvé všeobecné vety z planimetrie. Na základe podobnosti trojuholníkov skonštruoval diaľkomer, ktorým sa dala merať vzdialenosť lode od brehu. V roku 603 p.n.l. pozoroval veľké slnečné zatmenie. Na jeho základe predpovedal zatmenie Slnka v roku 585 p.n.l.

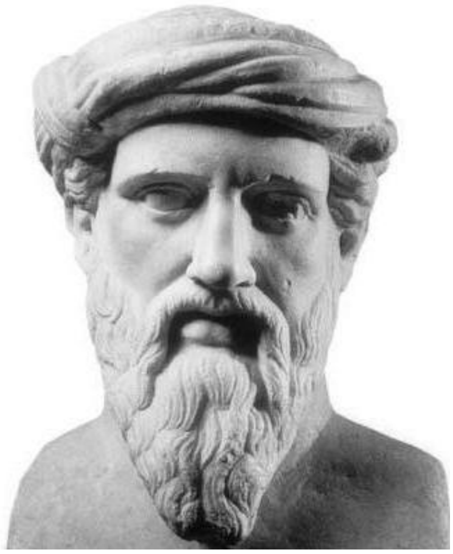
4. Množinou vrcholov pravých uhlov všetkých pravouhlých trojuholníkov s preponou AB je kružnica s priemerom AB okrem bodov A, B.



Pytagoras

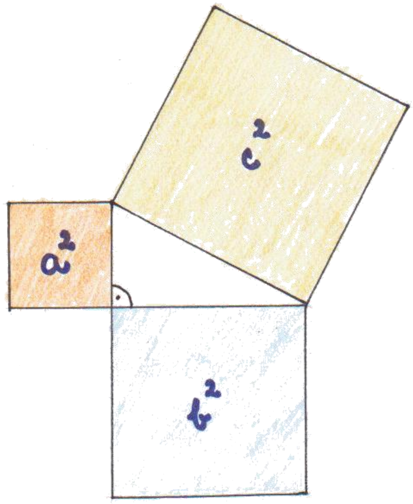
1. Matematik s filozofom
   vo štvorcoch sa zhliadol.
   Jeho veta dnes je vzorom,
   v Grécku vedám vládol.

2. Na svet prišiel pravdepodobne medzi rokmi 580 – 570 p.n.l. na ostrove Samos pri západnom pobreží Malej Ázie. Podobne ako iní slávni Gréci navštívil Egypt a Babylon. Po čase sa usadil v meste Krotón na juhu Apeninského polostrova. Tu okolo roku 530 p.n.l. založil spolok, kde sa jeho žiaci venovali filozofii, matematike, astronómii, medicíne a hudbe. Zomrel v roku 500 p.n.l. Pretože sa jeho spolok zúčastňoval aj mocenských sporov, jeho žiakov často prenasledovali a spolok okolo roku 440 p.n.l. zanikol.



3. Členovia spolku objavili napríklad známu vetu, že súčet veľkostí všetkých vnútorných uhlov v trojuholníku je 180º, geometrické riešenie kvadratických rovníc, zistili, že uhlopriečka štvorca so stranou 1 sa rovná $\sqrt{2}$. Veta, ktorá ich preslávila, bola v zvláštnych prípadoch známa už dlho predtým, napríklad v Číne 2200 rokov p.n.l. a v Indii 800 rokov p.n.l. Im sa však prisudzuje zrejme preto, že ju dokázali.

4. V každom pravouhlom trojuholníku sa obsah štvorca nad preponou rovná súčtu obsahov štvorcov nad obidvoma odvesnami.



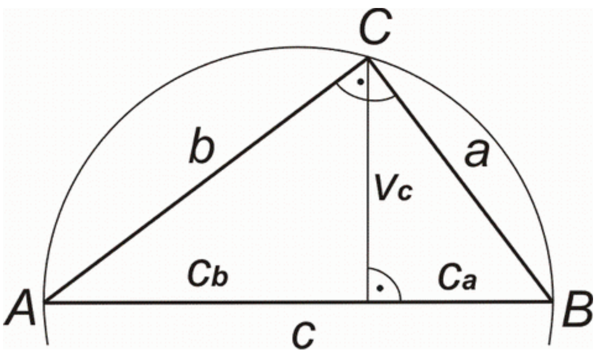
Euklides

1. Ptolemaiov matematik
   trojuholník skúmal.
   Že niet cesty pre kráľov,
   takú radu mu dal.

2. Žil v 3. storočí p.n.l. v Alexandrii, kde egyptský panovník Ptolemaios I. založil Múseion. Bola v ňom obrovská knižnica (700 000 zvitkov), veľa rôznych prístrojov, botanická záhrada, zverinec, hvezdáreň a pitevne. Medzi najväčšie osobnosti Múseionu patril práve náš matematik. Jeho prínos pre matematiku je obrovský. Napísal knihu, vlastne trinásť kníh s názvom *Stoichea* (Základy). Väčšinu matematiky, ktorá v Základoch je, nevymyslel sám. Vymyslel však spôsob, ako takúto knihu napísať a dodnes sa matematické knihy píšu podľa neho.

3. Všetko, čo matematici dovtedy poznali zhrnul do šiestich kníh o planimetrii, štyroch kníh o aritmetike a troch kníh o stereometrii. Preslávil sa tzv. axiomatickou výstavbou geometrie – vybral niekoľko axióm, čiže jasných tvrdení, ktoré sa nedokazujú. Pomocou týchto axióm už dokázal všetky ostatné tvrdenia geometrie. Jeho meno nesie aj dôkaz vety o tom, že prvočísel je nekonečne veľa a tiež algoritmus na hľadanie najväčšieho spoločného deliteľa dvoch čísel.

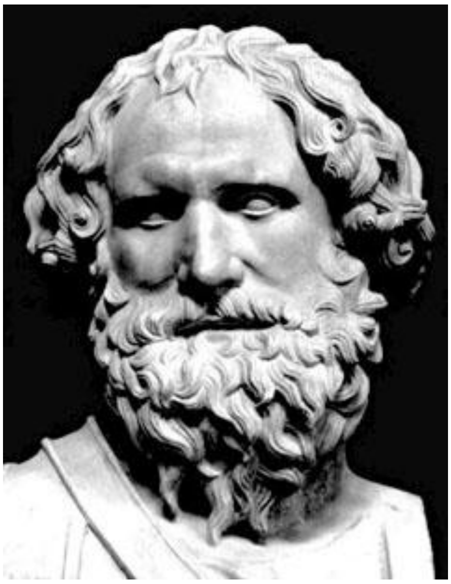
4. Druhá mocnina veľkosti výšky pravouhlého trojuholníka sa rovná súčinu veľkostí úsekov, ktoré vytvára päta výšky na prepone trojuholníka.



Archimédes

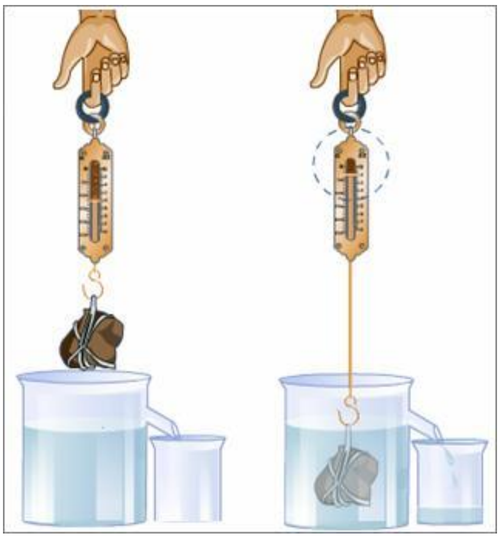
1. Do piesku kreslil si štvorce a kruhy,
   až kým sa zjavilo vojakov pár.
   V praviciach kopije, na prilbách stuhy,
   zrušili obrazce, pobledla tvár.

2. Pochádzal zo Syrakúz, bol synom astronóma a matematika Feidia, žil v rokoch 287 – 212 p.n.l. Bol priateľom syrakúzskeho panovníka Hierona. Navštívil Alexandriu v Egypte, kde v slávnom centre vzdelanosti - Múseione – načerpal veľa poznatkov a zoznámil sa s mnohými učencami. Po návrate do Syrakúz si s nimi písal, predovšetkým s Eratostenom, správcom alexandrijskej knižnice. Práve vďaka týmto listom poznáme jeho výsledky.



3. Vo svojom spise *Psammit* (O počítaní piesku) priniesol algoritmus konštrukcie stále väčších prirodzených čísel, odhadol číslo π vďaka 96-uholníkom vpísaným a opísaným kružnici, venoval sa kvadratúre kruhu. Svojimi presne vedenými experimentmi položil základy statiky a hydrostatiky. Zaviedol pojmy ťažisko, statický moment, hmotnosť, rovnováha na páke a základný zákon hydrostatiky. Legendárnymi sa stali jeho zásluhy pri obrane Syrakúz. V boji proti rímskym dobyvateľom sa používali jeho vynálezy – katapulty, kladkostroje a parabolické zrkadlá.

4. Teleso ponorené do kvapaliny je nadľahčované silou, ktorá sa rovná tiaži kvapaliny telesom vytlačenej.



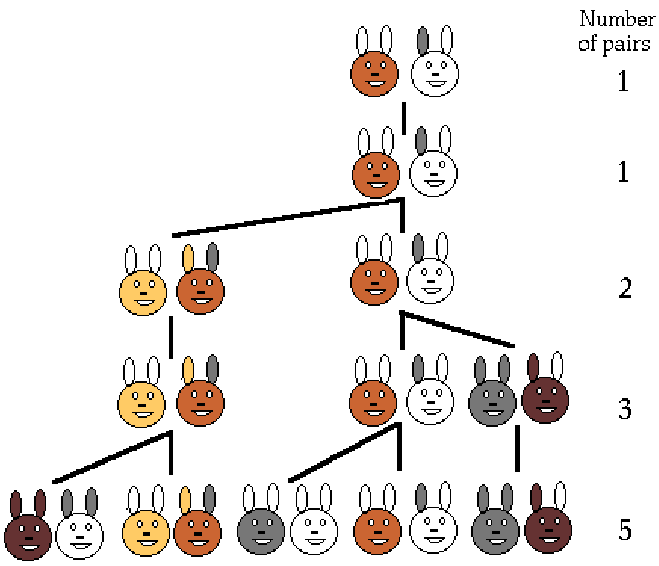
Leonardo Pisánsky (Fibonacci)

1. Arabské číslice
   priniesol k nám,
   spočítať zajace
   dokážem aj sám.

2. Narodil sa v talianskej Pise okolo roku 1180. Jeho otec Guglielmo bol prezývaný Bonaccio (dobrák) a bol vedúcim obchodného strediska v Béjaïi (prístav ležiaci v dnešnom Alžírsku). Svojho syna často brával so sebou na cesty do Afriky. Pravdepodobne pri jednej z týchto ciest sa zoznámil s arabským číselným systémom. Zomrel v roku 1250.

3. Veľa cestoval po stredomorí za obchodom a snažil sa naučiť tie aritmetické vedomosti, ktoré by mu ako obchodníkovi alebo pisárovi mohli byť užitočné. Čoskoro si uvedomil, že základná aritmetika používajúca arabské číslice je oveľa jednoduchšia než do tej doby v Európe používané rímske číslice. V roku 1202 vydal knihu *Liber abaci* (Kniha počtov), v ktorej predstavil arabský číselný systém Európe. V tejto knihe nula vystupuje ako číslo; zlomky prevádza na najmenšieho spoločného menovateľa; vykladá úmeru a jej využitie; rieši rovnice. Upozorňuje, že okrem druhých odmocnín (tie poznali už pytagorovci) existujú aj iné iracionálne čísla. I keď jeho dielo malo veľký vplyv na rozvoj európskej matematiky, začalo byť cenené až začiatkom 15. storočia.

4. Jeho meno nesie známa postupnosť čísel, daných vzťahmi
   $F_1 = 1, F_2 = 1, F_{n+2} = F_{n+1} + F_n$.



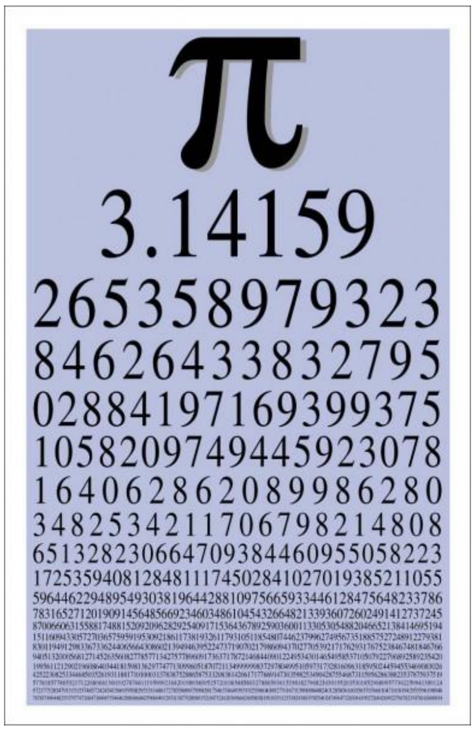
Ludolph van Ceulen

1. Učiteľ šermu v Holandsku
   s matikou bol kamarát,
   mal aj jednu tajnú lásku -
   číslo π mal veľmi rád.

2. Narodil sa 28. januára 1540 nemeckom meste Hildesheim, ale ako mnoho ďalších Nemcov v tej dobe emigroval pred katolíckym útlakom do Holandska. Vyučoval šerm a matematiku v Delfte. V roku 1594 si otvoril šermiarsku školu v Leidene. V tomto meste potom od roku 1600 učil na technickej škole aritmetiku a vojenské staviteľstvo („opevňovanie“). Bol vymenovaný za prvého profesora matematiky na Leidenskej univerzite. Zomrel 31. decembra 1610 v holandskom Leidene.

3. Napísal viacero prác, z ktorých najdôležitejšia bola *Van den Circkel* (O kruhu). Preslávil sa svojím výpočtom π, ktoré spočítal najprv na 20, neskôr na 35 desatinných miest. Použil k tomu mnohouholník s 2^{62} stranami. Strávil nad tým väčšinu svojho života a svoj výsledok má vyrytý na náhrobnom kameni.

4. Na jeho počesť je pomenované číslo π, vyjadrujúce pomer obvodu kruhu k jeho priemeru.



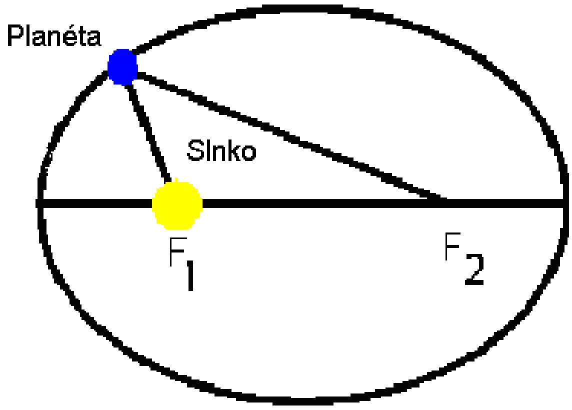
Johannes Kepler

1. Nemeckého astronóma
   poznáte určite.
   Určil, kde je planét zóna,
   pri Slnku sú skryté.

2. Tento nemecký astronóm, fyzik, optik a matematik sa narodil 27. decembra 1571 v nemeckom mestečku Weil der Stadt. Vyrastal v ťažkých podmienkach, ale napriek tomu už za štúdií vynikal – hlavne nadaním na matematiku. Jeho prvým pracoviskom bolo gymnázium v Štajerskom Hradci (dnes Graz), kde vyučoval matematiku a astronómiu. V roku 1600 prišiel do Prahy spolupracovať so slávnym hvezdárom Tychom Brahem, neskôr pracoval ako matematik na dvore cisára Rudolfa II. V roku 1612 odišiel do Linza. Počas svojho života zažil aj prenasledovanie, biedu, smrť blízkych. Po krátkej chorobe zomrel v Regensburgu 15. novembra 1630.

3. Žil v období, keď astronómovia vytvárali obraz slnečnej sústavy a tomu aj zasvätil celý svoj život. Všade v prírode hľadal akúsi matematickú dokonalosť, harmóniu. Vo svojom diele *Mysterium cosmographicum* (Kozmické mystérium) popísal svoju predstavu o súvise planetárnych sfér s pravidelnými telesami. Neskôr zistil, že táto predstava nebola správna, ale nakoniec predsa len objavil skutočné dráhy planét. Svojimi zákonmi pohybu nebeských telies definitívne rozriešil spor medzi heliocentrizmom a geocentrizmom v prospech Kopernikovej teórie. Počas svojho pobytu v Linzi vydal svoju jedinú matematickú knihu *Nova stereometria doliorum vinariorum* (Stereometria vínnych sudov), v ktorej sa venuje problematike určovania objemov rôznych rotačných telies. Zaujímavým je aj jeho dielo *Somnium* (*Sen*), považované za prvého predchodcu vedeckej fantastiky – popisuje v ňom svoje predstavy o Mesiaci.

4. Planéty obiehajú okolo Slnka po eliptickej dráhe, pričom Slnko je v jednom z ich spoločných ohnísk.



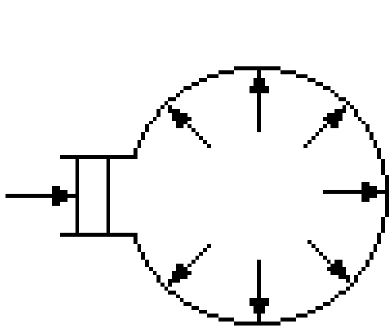
Blaise Pascal

1. Zákon tlaku v tekutine
   tento chlapík svetu dal.
   Počítací stroj a iné
   svojou mysľou zosnoval.

2. Tento francúzsky matematik, fyzik, teológ a náboženský filozof sa narodil 19. júna 1623 v Clermonte v bohatej rodine. Už od malička vynikal matematickým nadaním, mal však chatrné zdravie. Po otcovej smrti viedol v Paríži nákladný život s veľkým dvorom. Keď mal však v roku 1654 vážnu nehodu, venoval sa potom už len filozofii a náboženstvu. Vstúpil do kláštora, ktorý bol strediskom jansenizmu. V posledných rokoch žil v ústraní na vidieku ako asketický pustovník a pomáhal chudobným. Venoval sa veľkému projektu obrany kresťanstva, ktorý však nedokončil. Jeho poznámky vyšli posmrtne ako *Pensées* (Myšlienky) a sú jeho najslávnejším dielom. Zomrel 39-ročný, 19. augusta 1662 v Paríži.

3. Ako šestnásťročný napísal štúdiu o kužeľosečkách *Essai pour les coniques*, ako deväťnásťročný skonštruoval počítací stroj, ktorý vykonával štyri základné aritmetické úkony. Stroj stále vylepšoval a celkom ich zhotovil vyše päťdesiat. V práci *Traité du triangle arithmétique* (Pojednanie o aritmetickom trojuholníku) vyslovil niekoľko základných poučiek teórie pravdepodobnosti a kombinatoriky. Keď sa dozvedel o Torricelliho pokuse a objave atmosférického tlaku, začal robiť množstvo pokusov s ortuťovým stĺpcom. Výsledky skúmania atmosférického tlaku zhrnul v práci *Experiences nouvelles touchant le vide* (Nové experimenty s vákuom). Významné sú aj jeho práce v oblasti hydrostatiky - sformuloval základný zákon hydrostatiky, vyčíslil veľkosť hydrostatického tlaku, opísal zákon spojených nádob a princíp hydraulického lisu.

4. Tlak v kvapaline, ktorý vznikne pôsobením vonkajšej sily na povrch kvapaliny v uzavretej nádobe, je v každom mieste kvapaliny rovnaký.



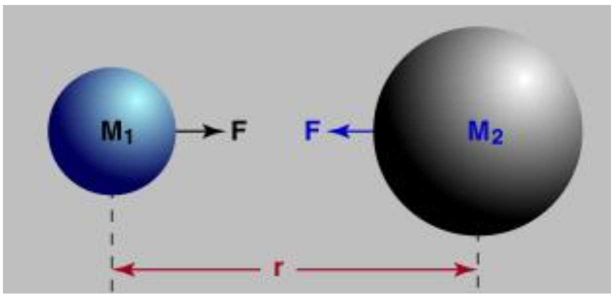
Isaac Newton

1. Keď mu vraj jablko spadlo na hlavu prišiel na nápad, čo získal mu slávu.

2. Narodil sa 4. januára 1643 vo Woolsthorpe na východnom pobreží Anglicka. Na univerzite v Cambridgei študoval matematiku, fyziku, teológiu a klasické jazyky. V roku 1669 sa stal profesorom matematiky a fyziky a popritom sa venoval vedeckej práci. Neskôr sa stal dozorcom mincovne a prezidentom Londýnskej kráľovskej spoločnosti. V roku 1705 ho kráľovna Anna povýšila do šľachtického stavu. Zomrel 31. marca 1727.

3. Medzi jeho prvé bádateľské práce patrili objav metódy nekonečných radov, výpočet plochy paraboly na 52 desatinných miest a neskôr vytvorenie náuky o počítaní s nekonečne malými číslami, tzv. metódy fluxií. Spolu s Leibnizom je zakladateľom infinitezimálneho počtu. Spočiatku sa venoval aj optike, neskôr sa začal zaoberať štúdiom mechaniky. Všetko, čo sa zistilo o najjednoduchších formách pohybu hmoty za predchádzajúce tisícročia, ako aj svoje vlastné objavy v mechanike zhrnul v monumentálnom diele *Philosophiae naturalis principia mathematica* (Matematické princípy prírodnej filozofie). Jeho učenie o priestore, čase, hmotnosti a sile malo obrovský vplyv na vývoj fyziky a má veľký praktický význam i dnes.

4. Každé dva hmotné body sa vzájomne priťahujú silou, ktorá je úmerná súčinu ich hmotností a nepriamo úmerná druhej mocnine ich vzdialenosti.



Leonard Euler

1. V Petrohrade, Berlíne
   vzorcov vždy mal plný stôl.
   Značky π, e aj iné
   do matiky zaviedol.

2. Narodil sa 15. apríla 1707 vo švajčiarskom Bazilei, kde začal ako 14-ročný študovať na univerzite filozofiu a matematiku. Od roku 1727 pôsobil v Petrohrade. Najprv ako vyučujúci matematiky a mechaniky, neskôr ako profesor fyziky a riadny akademik. V rokoch 1741 až 1766 pôsobil v Berlíne ako riaditeľ oddelenia matematiky Akadémie vied. Na pozvanie novej cárovny Kataríny Veľkej sa vracia do Petrohradu. Jeho zdravotné problémy sa však zhoršujú, veľkú časť svojej práce vytvoril slepý. Zomrel 18. septembra 1783.

3. Vytvoril takmer deväť stoviek publikácií. Skoro polovica z nich bola publikovaná až po jeho smrti. Venoval sa napr. matematickej analýze, variačnému počtu, výpočtu dráh planét, delostrelectvu a balistike, stavbe lodí, námornej navigácii, pohybu Mesiaca. Jeho meno nesie veta vyjadrujúca vzťah medzi počtom stien, hrán a vrcholov konvexného mnohostena $v + s = h + 2$. Po ňom je pomenovaná aj priamka spájajúca ťažisko, ortocentrum a stred kružnice opísanej trojuholníku. Známe je tiež jeho riešenie úlohy o siedmich mostoch v meste Kralovec pomocou teórie grafov a mnoho ďalších.

4. Jeho meno nesie iracionálne číslo, ktoré tvorí základ prirodzeného logaritmu.

$$e \doteq 2{,}718\ 281\ 828$$

ZÁVER

Štúdium školskej matematiky má vzbudiť, udržať záujem a schopnosť používať matematický spôsob myslenia a argumentácie v rôznych životných situáciách nášho každodenného života. Výsledky nášho nedávneho dotazníka ohľadne vyučovania matematiky ukázali, že väčšina študentov považuje tento predmet za užitočný a dôležitý. Zároveň však, ak mali vyjadriť svoje pocity voči tomuto predmetu, najčastejšia odpoveď bola „zložitý“, časté odpovede boli aj „jednotvárny“ či „nudný“. Odpovede „zaujímavý“ boli skôr výnimkou. A tak musíme s poľutovaním konštatovať, že mnoho žiakov (a určite i dospelých) k matematike nenašlo ten správny vzťah. Matematika sa im zdá nezrozumiteľná, abstraktná a suchá, preto o ňu často nemajú záujem. K zmene tejto situácie môžu prispieť učitelia matematiky aj pomocou niektorých aktivizačných prístupov, ak budú pred svojimi žiakmi prejavovať úprimné nadšenie a osobný záujem o matematickú kultúru. Ak budú vytvárať pestré intelektuálne prostredie, ukazovať neobvyklé postupy, nechajú žiakov experimentovať, súťažiť, odkrývať problémy, ponúkať nápady. Malým príspevkom k tejto problematike je aj táto práca OPS, v ktorej sme popísali svoje skúsenosti s využívaním niektorých aktivizujúcich metód vo vyučovaní matematiky na gymnáziu.

Naše skúsenosti potvrdzujú, že tieto aktivity umožňujú žiakov vytrhnúť z pasivity, motivovať ich, podnietiť k samostatnej práci, vytváraniu vlastných nápadov, získavaniu zručností a pritom nechať tiež priestor pre hru a zábavu. Veríme, že táto práca môže inšpirovať aj iných učiteľov matematiky, aby popísané námety úspešne využili vo svojej pedagogickej praxi.

ZOZNAM BIBLIOGRAFICKÝCH ZDROJOV

1. ANGIOLINI, A. 2000. *Hry s čtverečkovaným papírem a tužkou*. Praha : Portál, 2000. ISBN 80-7178-392-7

2. BERO, P. 1989. *Matematici, ja a ty.* Bratislava : Mladé letá, 1989. ISBN 80-06-001118-9

3. BOREC, T. 1989. *Dobrý deň, pán Ampére*. Bratislava : Alfa, 1989. ISBN 80-05-00042-1

4. BURJAN, V. – BERO, P. – ČERNEK, P. 1991. *Matematický koktail*. Bratislava : SPN, 1991. ISBN 80-08-00520-3

5. BURJAN, V. 1984. Chvála matematických hier. In: *Matematické obzory*, č. 23, 1984, s. 73-83. Bratislava : Alfa

6. BURJAN, V. – BURJANOVÁ, Ľ. 1991. *Matematické hry*. Bratislava : Pytagoras, 1991. ISBN 80-85409-00-3

7. FOLTA, J. – NOVÝ, Ľ. 1981. *Dejiny prírodných vied v dátach*. Bratislava : Smena, 1981.

8. MATFIAKOVÁ, A. 2012. *Využívanie aktivizujúcich metód v matematickej edukácii*. [cit. 2013-02-19]. Dostupné na: < http://trilian.ujep.cz/svoc/k3b/k3b_09.pdf >

9. PRŮCHA, J. – WALTEROVÁ, E. – MAREŠ, J. 2009. *Pedagogický slovník*. Praha : Portál, 2009. ISBN 978-80-7367-647-6

10. *Relax.* Banská Bystrica : TRIAN, spol. s r.o., ISSN 1338-3833

11. SCHÄTZ, U. *Různorodé metody ve výuce matematiky (2)*. In: Učitel matematiky, ročník 10, číslo 2 (42), január 2002, s. 89 – 94. Praha : JČMF, 2002. ISSN 1210-9037

12. ŠEVEROVÁ, D. a kol. 2005. *Metodické materiály pre učiteľov*. Bratislava : P-MAT n.o., 2005. ISBN 80-969395-0-5

13. VANKÚŠ, P. 2010. *Zbierka didaktických hier určených pre vyučovanie matematiky na druhom stupni základnej školy*. Bratislava : KEC FMFI UK Bratislava, 2010. ISBN 978-80-89186-61-7

14. ZNÁM, Š. a kol. 1981. *Pohľad do dejín matematiky*. Bratislava : Alfa, 1986.

ZDROJE POUŽITÝCH OBRÁZKOV

strana 33
http://geonext.uni-bayreuth.de/data/download/mmlu/thales/index.html
http://www.cut-the-knot.org/pythagoras/ThalesTheorem.shtml

strana 34
http://nadovka.wbl.sk/Matematika/nasobimedelime.htm

strana 35
http://www.adriatic.com.pl/?euklides,17
http://www.aristoteles.cz/matematika/pravouhly_trojuhelnik/euklidovy_vety/euklidova-veta.php

strana 36
http://www.nndb.com/people/746/000087485/
http://www.tutorvista.com/content/science/science-i/gravitation/buoyancy-archimedes.php#

strana 37
http://fineartamerica.com/products/leonardo-fibonacci-granger-poster.html
http://kawaii-anime-world.blog.cz/1010/xdd-hmmm-hmmm-zlaty-rez-x3

strana 38
http://www.learn-math.info/historyDetail.htm?id=Van_Ceulen
http://fyzmatik.pise.cz/63494-jak-si-zapamatovat-cislo-pi.html

strana 39
http://commons.wikimedia.org/wiki/File:Johannes_Kepler.jpg
http://www.posterus.sk/?p=7370

strana 40
http://marccortez.com/2012/08/19/a-prayer-for-sunday-blaise-pascal/

strana 41
http://www.planet-science.com/categories/under-11s/our-world/2010/12/all-the-colours-of-the-rainbow.aspx
http://www.posterus.sk/?p=7370

strana 42
http://plus.maths.org/content/os/issue42/features/wilson/index

Zdrojom ostatných obrázkov použitých v práci je súkromný archív autora.