Moderné vzdelávanie pre vedomostnú spoločnosť / Projekt je spolufinancovaný zo zdrojov EÚ

RNDr. Monika Molokáčová

Optimalizačné problémy

Osvedčená pedagogická skúsenosť edukačnej praxe

Prešov

2012

Vydavateľ:	Metodicko-pedagogické centrum, Ševčenkova 11, 850 01 Bratislava
Autor OPS/OSO:	RNDr. Monika Molokáčová
Kontakt na autora:	Gymnázium, Poštová 9, Košice, molokacova@gympos.sk
Názov OPS/OSO:	Optimalizačné problémy
Rok vytvorenia OPS/OSO:	2012
Odborné stanovisko vypracoval:	RNDr. Beáta Vavrinčíková

Za obsah a pôvodnosť rukopisu zodpovedá autor. Text neprešiel jazykovou úpravou.

Táto osvedčená pedagogická skúsenosť edukačnej praxe/osvedčená skúsenosť odbornej praxe bola vytvorená z prostriedkov projektu Profesijný a kariérový rast pedagogických zamestnancov. Projekt je financovaný zo zdrojov Európskej únie.

Kľúčové slová

optimalizácia, optimálne riešenie, maximalizácia, minimalizácia, účelová funkcia, prípustné riešenie, funkcia, rovnica, nerovnica, grafická metóda riešenia

Anotácia

V práci je prezentovaná osvedčená pedagogická skúsenosť edukačnej praxe v predmete matematika na gymnáziu. Predstavuje systém lineárnych a nelineárnych optimalizačných úloh zameraných na rozvoj funkčného myslenia žiakov. Práca obsahuje návrh metodiky uplatnenia úloh vo vyučovaní, ktorej cieľom je aktívne konštruovanie žiackych spôsobilostí s podporou IKT. K metodike sú uvedené aj postrehy a odporúčania plynúce z jej uplatnenia v praxi.

OBSAH

ÚVOD

„Hľadajme spôsob, aby učitelia menej učili
a žiaci viac pochopili."
Jan Amos Komenský

V úvode citovaný výrok dokonale vystihuje inovačné snahy súčasnej modernej didaktiky, ktorá sa orientuje na aktivizáciu myslenia, samostatnosti a tvorivosti žiakov, na schopnosť získavať, triediť a aplikovať informácie, so zámerom formovať osobnosť žiaka pripravenú na celoživotné vzdelávanie a učenie sa. Na druhej strane to, že je aktuálny už štyri storočia, poukazuje na skutočný problém, ktorým by sme sa mali zaoberať: Ako účinne implementovať inovačné myšlienky do procesu výchovy a vzdelávania? A práve z tohto uhla pohľadu sme v citovanom výroku našli inšpiráciu pre opísanie osvedčenej metodiky vyučovania optimalizačných úloh konštruktivistickými metódami a veríme, že bude podnetná aj pre iných učiteľov.

Učivo tematického celku „Funkcie" nachádza uplatnenie takmer vo všetkých vedných odboroch a v mnohých oblastiach bežného života. Napriek tomu u mnohých žiakov prevažuje abstraktné vnímanie funkcií a s nimi súvisiacich pojmov, bez schopnosti využiť osvojené poznatky pri riešení praktických úloh, čo potvrdzuje rozsiahly pedagogický výskum OECD PISA. Z neho tiež vyplýva, že žiakom chýba zručnosť v čítaní a interpretácii informácií z grafu.

V bežnom živote ľudia často riešia rozhodovacie problémy, pri ktorých posudzujú a porovnávajú možné varianty z rôznych hľadísk, experimentujú a hľadajú najvýhodnejšie riešenie. Mnohé z týchto problémov vieme efektívne riešiť nástrojmi matematiky. V tejto práci chceme poukázať na možnosť vyťažiť z týchto situácií v záujme premeny tradičného, inštruktívneho vyučovania matematiky smerom k aktívnemu konštruovaniu žiackych spôsobilostí. Uplatnenie vytvoreného systému úloh podľa navrhnutej metodiky má za cieľ motivovať žiakov, podporiť ich tvorivosť, chuť skúmať a experimentovať, kriticky zhodnotiť objavené riešenia, a v neposlednom rade zdôrazniť výhody IKT podpory pri riešení. Úlohy svojím matematickým charakterom sledujú naplnenie hlavného didaktického cieľa, ktorým je rozvoj funkčného myslenia žiakov, teda ich schopnosti vnímať závislosť javov v reálnom svete, chápať príčinnosť zmien, vedieť vyjadriť vzťahy matematickým aparátom, reprezentovať ich graficky a aplikovať vytvorený model pri hľadaní riešenia.

Jadro práce je rozdelené do štyroch kapitol. Obsahom prvej kapitoly je stručný opis osvedčenej pedagogickej skúsenosti (ďalej OPS). Druhá kapitola je venovaná charakteristike OPS z hľadiska didaktiky. Rozsiahlejšie kapitoly, tretia a štvrtá, predstavujú navrhnutú metodiku uplatnenia systému úloh vo vyučovaní matematiky na strednej škole. Zahŕňajú zadania úloh, návody na riešenie, opis využitia učebných pomôcok na báze IKT, odporúčané didaktické metódy a formy. Obsahujú tiež zopár postrehov, ktoré vyplynuli z nášho uplatnenia metodiky na hodinách matematiky.

1 OPIS OSVEDČENEJ PEDAGOGICKEJ SKÚSENOSTI

Kontext a rámec:

Metodika predstavená v jadre tejto práce bola opakovane overená v rámci vyučovania povinného predmetu matematika na gymnáziu, v triedach prvého a druhého ročníka so všeobecným zameraním. V súlade so štátnym vzdelávacím programom (ďalej ŠVP) a školským vzdelávacím programom (ďalej ŠkVP) sa v týchto triedach týždenne vyučujú štyri hodiny matematiky.

Škola má zakúpenú licenciu softvérového balíka typu CAS: Wolfram Research Mathematica, ktorej súčasťou sú učiteľské a žiacke licencie pre domáce využitie. Disponuje tromi multimediálnymi počítačovými učebňami, ktoré sú ťažiskovo využívané na vyučovanie informatiky. Vo všetkých učebniach školy je možné využiť datavideoprojekciu. Učitelia majú v každej predmetovej komisii k dispozícii aspoň jeden prenosný počítač.

Špecifikácia cieľovej skupiny:

- kategória, resp. podkategória pedagogických a odborných zamestnancov podľa zákona č. 317/2009. Z. z.: *učiteľ pre nižšie stredné odborné vzdelávanie, stredné odborné vzdelávanie, úplné stredné všeobecné vzdelávanie, úplné stredné odborné vzdelávanie a učiteľ pre vyššie odborné vzdelávanie (učiteľ strednej školy)*
- vzdelávacia oblasť: *matematika a práca s informáciami*
- škola, ročník: *gymnázium, 1. – 2. ročník*
- vyučovací predmet: *matematika*
- tematický okruh: *vzťahy, funkcie, tabuľky, diagramy*
- tematický celok, učivo: *funkcie, sústavy rovníc a nerovníc, lineárne a nelineárne optimalizačné problémy*

Cieľ práce:

Metodicky opísať vyučovanie lineárnych a nelineárnych optimalizačných problémov, s uplatnením konštruktivistických prístupov zameraných na podporu aktívneho učenia sa žiakov.

Vymedzenie kompetencií:

Prostredníctvom reálneho kontextu, do ktorého sú úlohy vsadené, nenútene budujeme medzipredmetové vzťahy, formujeme postojovú orientáciu žiakov a posilňujeme kompetencie uplatňovať matematické a algoritmické myslenie, kompetencie v oblasti riešenia problémov, modelovania, argumentácie, komunikácie, sebahodnotenia, učebné, pracovné, v oblasti IKT.

2 PLÁNOVANIE VYUČOVANIA

Podľa štátneho vzdelávacieho programu predmetu matematika, príloha ISCED 3A je učebný predmet matematika na gymnáziách zameraný na rozvoj matematickej kompetencie tak, ako ju formuloval Európsky parlament:

„Matematická kompetencia je schopnosť rozvíjať a používať matematické myslenie na riešenie rôznych problémov v každodenných situáciách. Vychádzajúc z dobrých numerických znalostí sa dôraz kladie na postup a aktivitu, ako aj na vedomosti. Matematická kompetencia zahŕňa na rôznych stupňoch schopnosť a ochotu používať matematické modely myslenia (logické a priestorové myslenie) a prezentácie (vzorce, modely, diagramy, grafy, tabuľky).“

Učivo tematického celku Funkcie nachádza uplatnenie takmer vo všetkých vedných odboroch a v mnohých oblastiach bežného života. Je nosnou témou okruhu „Vzťahy, funkcie, tabuľky, diagramy“, ktorého charakteristiku vymedzuje ŠVP nasledovne: „Žiaci pracujú s rôznymi reprezentáciami vzťahov, algebraizujú a modelujú jednoduché kvantitatívne vzťahy. Riešia rovnice, nerovnice a ich sústavy. Zaoberajú sa grafmi funkcií a ich vlastnosťami, predovšetkým v súvislosti s „čítaním“ grafov.“ Z našich skúseností vyplýva, že vo väčšine školských vzdelávacích programov je jeho obsah v učebných osnovách rozvrhnutý na celú dobu gymnaziálneho štúdia, v niektorých prípadoch s výnimkou posledného ročníka, v súlade s požiadavkou špirálovitého získavania vedomostí.

Napriek tomu u mnohých žiakov prevažuje abstraktné vnímanie funkcií a s nimi súvisiacich pojmov. Konkrétne zistenia v tejto oblasti poskytuje analýza výsledkov medzinárodných pedagogických výskumov OECD PISA v rokoch 2003 (Kubáček, 2004), 2006 (Koršňáková, Kováčová, 2007) a 2009 (Koršňáková, Kováčová, Heldová, 2010). Podľa nej „žiaci nedokázali plne využiť to, čo sa naučili“. Jedným z dôvodov je pravdepodobne malý dôraz kladený na prepojenosť učiva s reálnymi situáciami vo vyučovaní matematiky. S tým úzko súvisí aj práca s grafickým materiálom (grafy, tabuľky, diagramy), pri ktorej žiaci nepreukázali dostatočnú zručnosť v čítaní a interpretácii informácií z grafu. Medzi ťažšie zvládnuteľné patrili tiež úlohy vyžadujúce argumentáciu a zdôvodnenie, ako aj úlohy na riešenie podľa návodu, ktoré sa v bežne dostupných učebných materiáloch vyskytujú veľmi zriedkavo, hoci ich význam vo vyučovaní, ako aj v reálnom živote, je nepopierateľný.

Tieto zistenia jednoznačne poukazujú na potrebu inovácie vyučovacích stratégií smerom k podpore aktivity a angažovanosti žiakov v procese vzdelávania, v záujme zvyšovania vyššie definovanej matematickej gramotnosti žiakov. To je plne v súlade s požiadavkou ŠVP: „Pri voľbe metód vyberáme moderné vyučovacie metódy, ktoré podnecujú žiakov k aktívnejšiemu prístupu.“

2.1 Konštruktivistické vyučovacie stratégie

„Nech sa nič neučí iba na základe autority, ale všetko na základe dôkazov zo zmyslov a rozumu. Všetko, čo sa podáva, sa má upevniť dôvodmi... Vedieť znamená poznať príčiny vecí...“ (Komenský in Turek, 2008, s. 163)

Všetky moderné koncepcie vyučovacieho procesu sa zhodujú v tom, že žiak musí byť vo vyučovacom procese motivovaný a aktívny, že je nevyhnutné odstrániť pasivitu študentov, typickú pre tradičné vyučovanie. Protikladom tradičnej školy je koncepcia konštruktivizmu, kde nachádzajú uplatnenie aktivizujúce a komplexné vyučovacie metódy. Charakteristické pre túto koncepciu je, že žiak sám zvažuje nové informácie, porovnáva ich s predchádzajúcimi skúsenosťami, prispôsobuje a pretvára tieto nové informácie tak, aby mu dávali zmysel z hľadiska toho, čo už vie, čím aktívne konštruuje svoje poznanie. Aj od učiteľa sa vyžaduje aktívny prístup a tvorivosť, v súlade s aktuálnymi cieľmi a potrebami spoločnosti, s požiadavkou na nepretržité sledovanie nových poznatkov a trendov vo svojom obore (Haláková, Kubiatko, 2007). Zdôrazňuje sa aktivita oboch subjektov vyučovacieho procesu, učiteľ sa stáva partnerom žiaka. To má za následok priaznivý vplyv na klímu triedy, v komplexnom ponímaní aj klímu školy.

Aktivizujúce metódy sa snažia prekonávať stereotyp vo výučbe, podporujú tvorivé hľadanie učiteľa, rozvíjajú osobnosť žiaka, apelujú na myšlienkovú a charakterovú samostatnosť, zodpovednosť, tvorivosť a nezávislosť. Počítajú so záujmom žiakov, s vnútornou motiváciou žiaka, vychádzajú v ústrety možnostiam individuálneho učenia sa. Primárne nachádzali uplatnenie najmä v alternatívnych školách, odtiaľ však už ako osvedčené prenikajú do tradičnej školy (Vališová, Kasíková, 2011, s. 197).

Svojím charakterom sú aktivizujúce metódy nezastupiteľné pri rozvoji kľúčových kompetencií a hodnotového systému žiakov vďaka tomu, že ich uplatnenie v procese vzdelávania prirodzene vedie žiakov

- k cielenému hľadaniu nových poznatkov,
- k spochybňovaniu a nedôvere voči informačným zdrojom bez porozumenia,
- k potrebe argumentácie a zdôvodňovania,
- k objavovaniu vzájomných súvislostí medzi poznatkami bez ohľadu na učebný predmet,
- k dôvere vo vlastné schopnosti,
- k uplatňovaniu vlastného myslenia a nových nápadov,
- k overovaniu netradičných myšlienok, aj tých, ktoré sú v rozpore s uznávanými pravdami,
- k vytvoreniu a vyjadreniu vlastného pohľadu na svet,
- k spolupráci v skupine,
- k formovaniu interpersonálnych vzťahov na rôznych úrovniach.

2.2 Didaktická analýza návrhu metodiky

Obsahový plán opísaného vyučovania vychádza z obsahového a výkonového štandardu prílohy ISCED 3A štátneho vzdelávacieho programu predmetu matematika.

Relevantná časť ***obsahového štandardu ŠVP:***

Rôzne (negrafické) metódy reprezentácie vzťahov (slovné, algebrické, tabuľkové).
Algebraizácia a modelovanie jednoduchých kvantitatívnych vzťahov (výrazy, vzorce, nerovnosti).
Riešenie rovníc a sústav (lineárne).
Graf funkcie jednej premennej.
Riešenie rovníc a nerovníc (lineárne a kvadratické).
Funkcia – lineárna a exponenciálna závislosť, príklady iných funkcií (kvadratická, mocninová, goniometrická, logaritmická).

Relevantná časť ***výkonového štandardu ŠVP:***

- v jednoduchých prípadoch zvoliť vhodnú reprezentáciu daného vzťahu medzi veličinami, porozumieť tabuľkám a grafickým reprezentáciám,
- vzťah opísaný slovne (špeciálne lineárnu závislosť) zapísať pomocou konštánt a premenných,
- modelovať reálne problémy a úlohy matematickým jazykom a interpretovať výsledky riešenia matematického problému do reálnej situácie,
- dosadiť do vzorca,
- zapísať dané jednoduché vzťahy pomocou premenných, konštánt, rovností a nerovností,
- riešiť slovné úlohy vyžadujúce riešenie jednoduchých rovníc s jedným výskytom neznámej alebo sústav rovníc s dvoma neznámymi, ktoré možno previesť na jednu rovnicu,
- použiť vhodnú metódu riešenia kvadratickej rovnice (napr. pomocou úpravy na štvorec, diskriminantu, graficky),
- zostaviť lineárnu rovnicu, sústavu lineárnych rovníc, kvadratickú rovnicu alebo nerovnicu predstavujúcu matematický model slovnej úlohy, vyriešiť ju, overiť a interpretovať výsledky s ohľadom na pôvodnú slovnú úlohu,
- z grafu funkcie odčítať s dostatočnou presnosťou veľkosť funkčnej hodnoty a naopak zaznačiť známu veľkosť funkčnej hodnoty do grafu,
- riešiť jednoduché praktické úlohy vyžadujúce čítanie grafu funkcie alebo jeho tvorbu,
- na základe grafického znázornenia určiť približné riešenie – odhadnúť riešenie,
- zostrojiť graf lineárnej a kvadratickej funkcie podľa jej predpisu,
- geometricky interpretovať riešenie rovníc alebo sústav rovníc.

ŠVP okrem iného vymedzuje všeobecné ciele a rámcový obsah vzdelávania, vo vyučovaní predmetu matematika na gymnáziách kladie dôraz na

- získavanie nových vedomostí prostredníctvom riešenia úloh s rôznorodým kontextom,
- tvorbu jednoduchých hypotéz a skúmanie ich pravdivosti,
- použitie rôznych spôsobov reprezentácie matematického obsahu (text, tabuľka, graf, diagram),
- schopnosť orientácie v rovine a v priestore,
- rozvoj algoritmického myslenia,
- budovanie informatickej kultúry u žiakov.

Uvedené univerzálne aj špecifické požiadavky sa premietli do samotného výchovno-vzdelávacieho procesu stanovením nasledovných kognitívnych a psychomotorických cieľov:

- opísať slovne vzťahy medzi veličinami v praktických úlohách,
- algebrizovať jednoduché vzťahy medzi veličinami v praktických úlohách,
- vytvoriť grafickú reprezentáciu vzťahu dvoch veličín bez použitia, aj s využitím softvérových prostriedkov,
- interpretovať grafickú reprezentáciu vzťahu dvoch veličín,
- modelovať reálne situácie odvodené z problémov z praxe,
- nájsť, resp. odhadnúť riešenie v matematickom modeli,
- posúdiť správnosť získaného riešenia vzhľadom ku kontextu zadania,
- interpretovať získané riešenie v pôvodnom kontexte,
- prezentovať a obhájiť výsledky samostatnej práce,
- zhodnotiť prezentované riešenia spolužiakov.

Rozvoj nonkognitívnej zložky osobnosti žiaka je úzko spätý s výberom ostatných prvkov vzdelávacieho procesu. Výrazným výchovným činiteľom je tiež kontextové zladenie pripravených didaktických materiálov so záujmami a potrebami žiakov, v súlade s hodnotami a požiadavkami spoločnosti, o čo sme sa pri výbere úloh snažili. Metodikou sledujeme naplnenie nasledovných afektívnych cieľov:

- vyjadriť vlastný pohľad na predstavenú situáciu,
- porovnať ponúkané riešenia úlohy,
- akceptovať názory iných žiakov,
- oponovať návrhom iných žiakov,
- podieľať sa na práci v skupine,
- prevziať zodpovednosť za prípadný úspech – neúspech skupiny,
- vyrovnať sa s konkurenciou v triede.

Zvládnutie učiva kladie minimálne požiadavky na vstupné vedomosti a zručnosti žiakov. Ide o zdatnosť v algebrickom a grafickom riešení lineárnych rovníc, nerovníc a ich sústav, aktívne chápanie pojmov funkcia a vlastnosti funkcie, užívateľské IKT zručnosti.

Najdôležitejším materiálnym prostriedkom opisovaného vyučovania je počítač s príslušným softvérovým vybavením a datavideoprojekčná technika. Počítačovou podporou vyučovania, okrem iného, sledujeme zvýšenie motivácie a záujmu žiakov prostredníctvom atraktívnych učebných pomôcok, s cieľom využiť jej potenciál pre kreatívne vzdelávanie otvorené skúmaniu a objavovaniu. Využívame najmä

- nástroje tabuľkového procesora,
- nástroje dynamického geometrického systému (ďalej DGS),
- nástroje počítačového algebrického systému (ďalej CAS),
- internetovú výpočtovú aplikáciu dostupnú na http://www.wolframalpha.com.

Slúžia ako prostredie na matematické modelovanie, ako nástroje na interaktívne výpočty a dynamické kreslenie grafov funkcií. Ich využitím eliminujeme rutinnú, zautomatizovanú činnosť žiakov (napr. numerické výpočty, konštrukcia grafov), zvyšujeme dynamiku vyučovania a vytvárame priestor na riešenie úloh odvodených z pôvodnej zmenou podmienok. Počítačové riešenie sa vyznačuje presnosťou, časovou úspornosťou, najmä pri následnej manipulácii a úpravách riešenia. Uplatňovaním tohto nástroja však nesmú byť ohrozené základné matematické kompetencie žiakov, medzi ktoré nesporne patrí manuálne zostrojenie, či načrtnutie grafu funkcie.

V metodike sú uplatnené didaktické zásady uvedomelosti a aktivity, názornosti, prepojenia teórie s praxou, primeranosti. Prevažujú konštruktivistické metódy a formy práce. Našou snahou je, aby opísaná pedagogická skúsenosť bola prínosom najmä v podobe:

- zatraktívnenia náročného učiva o funkciách,
- poukázania na aplikovateľnosť matematického aparátu pri riešení reálnych problémov,
- zlepšenia predstavivosti, experimentálnej zručnosti a tvorivosti žiakov,
- rozvoja kritického myslenia a hodnotiaceho posúdenia žiaka podnecovaním k skúmaniu a formulácii vlastných záverov,
- spresňovania procesu učenia sa, najmä čo sa týka asociácie analytického a grafického vyjadrenia funkčnej závislosti,
- podnecovania žiakov k efektívnemu využívaniu moderných technológií,
- zlepšenia sociálnych, komunikačných a interpersonálnych zručností žiakov,
- demokratizácie vzťahu „učiteľ – žiak“ a tým aj celkovej klímy výchovno-vzdelávacieho procesu.

Tabuľka 1 Základné charakteristiky návrhu metodiky

Téma	***Ročník***
Lineárne a nelineárne optimalizačné problémy	Prvý, druhý SŠ
Ciele	***Vstup***
• objaviť závislosť veličín v úlohe • matematicky vyjadriť vzťahy medzi veličinami v praktických úlohách • vytvoriť grafickú reprezentáciu závislosti dvoch veličín s využitím IKT prostriedkov a interpretovať ju • abstrahovať problém zo zadania úlohy • vytvoriť vhodný matematický model problémovej situácie • nájsť, resp. odhadnúť riešenie v modeli • posúdiť správnosť získaného riešenia vzhľadom ku kontextu zadania • interpretovať získané riešenie v pôvodnom kontexte • prezentovať a obhájiť výsledky samostatnej práce • zhodnotiť prezentované riešenia spolužiakov	• rozumieť pojmom závislosť, funkcia • poznať základné vlastnosti funkcií aspoň na intuitívnej úrovni • mať užívateľské zručnosti v ovládaní nástrojov tabuľkového procesora • mať užívateľské zručnosti v používaní softvérových nástrojov v prostredí operačného systému s grafickým ovládacím režimom
Kompetencie	***Didaktický problém***
• špecifikovať problém, selektovať relevantné údaje • využiť vhodný IKT nástroj na reprezentáciu a skúmanie údajov • kombinovať geometrický a algebrický prístup pri analýze vzťahov medzi objektami • modelovať • interpretovať objavené vzťahy • argumentovať a zdôvodňovať • komunikovať	• Nedostatky v žiackych riešeniach praktických slovných úloh často pramenia z neschopnosti vyjadriť vzťahy medzi veličinami pomocou rovníc a funkčných závislostí. V návrhu metodiky sú preto využité optimalizačné úlohy z bežného života na rozvoj funkčného myslenia žiaka, s dôrazom na jeho aktívne včlenenie do procesu vzdelávania.
Prostriedky	***Metódy a formy***
• nástroje tabuľkového procesora • nástroje DGS a CAS • internetová aplikácia http://www.wolframalpha.com	• konštruktivistické prístupy k učeniu • kombinácia individuálnej, skupinovej a frontálnej formy práce s podporou IKT

3 LINEÁRNE OPTIMALIZAČNÉ PROBLÉMY

Návrh metodiky sa opiera o učebný materiál s interaktívnymi prvkami, ktorý približuje podstatu optimalizačného problému a princíp riešenia lineárnych optimalizačných úloh grafickou metódou. Obsahuje sériu úloh riešených graficky aj využitím algebrických softvérových nástrojov. Úlohy majú spoločný základný kontext. Vzhľadom k tomu, že učebnú pomôcku sme vytvorili v komerčnom CAS softvéri Mathematica, minimálne rozšírenom v prostredí slovenských stredných škôl, jeho funkcionalitu nahradíme voľne dostupným dynamickým geometrickým systémom GeoGebra, ktorý má integrovanú podporu pre algebrickú reprezentáciu údajov a internetovou aplikáciou http://www.wolframalpha.com.

Učivo obsahovo nadväzuje na riešenie rovníc, nerovníc a ich sústav grafickou metódou, aplikuje osvojené žiacke zručnosti. Výhody softvérového riešenia spočívajúce v rýchlosti, presnosti a názornosti by mal učiteľ využiť až po overení, že manuálne riešenie žiakom nerobí ťažkosti. Máme za to, že v opačnom prípade ponúknutie softvérového dokonalého riešenia (ani vo forme postupnosti čiastkových výsledkov) neposkytuje žiakovi dostatok podnetov na uvedomenie si matematickej podstaty riešenia a nedostatočne poukazuje na jeho algoritmus.

V úvode vyučovacej jednotky volíme individuálnu formu práce žiakov. Ich pozornosť a záujem získame prostredníctvom opisu reálnej problémovej situácie a následného zadania úlohy. Text žiakom sprístupníme pomocou videoprojekcie alebo v tlačenej podobe a vymedzíme čas na samostatné úvahy a výpočty. Je dôležité, aby mal každý žiak prístup k údajom uvedeným v texte pri vlastnej analýze situácie a objavovaní riešenia.

Úloha 1

Čajové pečivo FEDORNETY

Majiteľ prosperujúcej tradičnej a internetovej kaviarne v nákupnom centre, Fedor Podnikavý, sa rozhodol rozšíriť ponuku kaviarne o čerstvé pečivo. Priestorové obmedzenie mu nedovoľovalo prevádzkovať výrobu zákuskov, zakúpil preto automatický stroj na výrobu vanilkových koláčikov s rôznymi náplňami. Na ich prípravu sa používali originálne polotovary dodávané v baleniach: vanilkové cesto - 25 kg, 5 druhov náplní - spoločná paleta 5 kg, čokoládová poleva - 3 kg a ovocný džem - 4 kg. Voňavé FEDORNETY podľa očakávania lákali stále viac zákazníkov, čím sa zvýšil zisk z prevádzky o takmer 50 percent. Majiteľ bol veľmi spokojný, ale trápilo ho každodenné plytvanie surovinami, ktoré podľa hygienických noriem nebolo možné uskladniť do ďalšieho dňa. Aj napriek tomu, že kapacita kaviarne bola vyťažená na maximum, denne sa vyhadzovalo asi 9 kg vanilkového cesta, 1 kg čokoládovej polevy, 2 kg ovocného džemu a nepatrné množstvo náplní.

A tak do Fedorovho podnikateľského plánu pribudla výroba trvanlivého čajového pečiva z prebytkov. Investoval do kúpy jednoduchého baliaceho zariadenia a začal s produkciou dvoch druhov čajového pečiva. Spotreba polotovarov a predajné ceny sú uvedené v nasledujúcej tabuľke.

Názov produktu	***Spotreba polotovarov***			***Predajná cena***
	vanilkové cesto	*čokoládová poleva*	*ovocný džem*	
Krehké FEDORNETY (1 balenie)	*0,5 kg*	*50 g*	*–*	*2 €*
Ovocné FEDORNETY (1 balenie)	*0,3 kg*	*60 g*	*0,2 kg*	*3 €*

Koľko balení krehkých a koľko ovocných koláčikov má Fedor denne produkovať, aby z predaja dosiahol čo najväčší zisk?

(Vzhľadom k tomu, že produkty sú vyrábané z prebytkov v rámci základnej pracovnej náplne zamestnancov, náklady na suroviny a výrobu sú nulové. Výška nákladov na balenie je podstatne nižšia ako pri predaji na priamy konzum a je už zahrnutá v režijných nákladoch prevádzky. Dopyt po oboch druhoch čajového pečiva tejto značky je veľký, môžeme predpokladať, že všetky vyprodukované balenia sa predajú.)

Dá sa očakávať, že žiaci dosadzovaním hodnôt za počty kusov vyrobených balení nájdu niekoľko prípustných riešení úlohy, nie nutne optimálne riešenie. Po uplynutí stanoveného času frontálne zopakujeme otázku položenú v úlohe, prípadne sa pýtame konkrétneho žiaka, čo by odporučil majiteľovi Fedorovi. Svoje riešenie zapíše na tabuľu. Tým aktivizujeme žiakov, ktorí majú lepšie odporúčanie, aby ho prezentovali. Výsledkom je postupnosť „možných ziskov“. V ideálnom prípade sú medzi prezentovanými riešeniami aj neprípustné riešenia a optimálne riešenie (je dôležité, aby učiteľ poznal optimálne riešenie: 8 balení prvého druhu, 10 balení druhého druhu, zisk 46 €, a vedel pohotovo rozhodnúť o prípustnosti riešenia). Inak neprípustné riešenie na tabuľu doplníme, napr. 10 kusov a 10 kusov so ziskom 50 €, a prezentujeme ho ako „ešte vyšší zisk“. Na žiacke (resp. svoje dopísané neprípustné riešenie) upriamime pozornosť a vedieme žiakov k zisteniu a zdôvodneniu jeho neprípustnosti. Farebne ho na tabuli odlíšime od ostatných riešení. Ak v postupnosti chýba optimálne riešenie, navedieme žiakov k jeho nájdeniu, tiež ho graficky zvýrazníme medzi ostatnými. Riešenie úlohy tým však neuzavrieme, požadujeme „uistenie, že vyšší zisk zo spracovania prebytkov majiteľ Fedor nijako nemôže dosiahnuť“.

Počas skusmého žiackeho riešenia prirodzene zavedieme termíny prípustného, neprípustného a optimálneho riešenia optimalizačnej úlohy.

V ďalšej fáze vyučovacej jednotky na požadované overenie správnosti výsledku predstavíme grafickú metódu riešenia úlohy, ktorá sa vyznačuje názornosťou. Postup následne zovšeobecníme. Postupujeme podľa vopred pripraveného dokumentu s nižšie uvedeným textovým obsahom, ktorého súčasťou je interaktívny graf vytvorený v dostupnom softvéri na grafické znázorňovanie priebehu funkcie. Ukážky zobrazujú grafy vytvorené v CAS Mathematica a v DGS GeoGebra (obr. 1).

Princípom matematického riešenia praktických úloh je:

- nahradiť problém z reálneho sveta vhodným matematickým modelom,
- nájsť v tomto modeli riešenie,
- overiť a interpretovať nájdené riešenie opäť slovne.

V matematickom modeli veličinám z textu úlohy odpovedajú premenné alebo konštanty, preto začneme zavedením označenia:

počet denne vyprodukovaných balení pečiva "Krehké FEDORNETY" ... $\boldsymbol{x}$
počet denne vyprodukovaných balení pečiva "Ovocné FEDORNETY" ... $\boldsymbol{y}$,

pričom obe premenné môžu nadobúdať iba nezáporné celočíselné hodnoty.
Majiteľ Fedor Podnikavý sa snaží o to, aby jeho zisk z predaja (celá tržba, lebo náklady na suroviny a výrobu sú nulové) dosiahol čo možno najväčšiu hodnotu:

zisk z predaja (v eurách) ... $\boldsymbol{2x + 3y}$ ***MAX***

Výraz $2x + 3y$**,** ktorého hodnota má byť maximálna možná, definuje **účelovú funkciu** $2x + 3y = c$, kde c je reálny parameter. Vo všeobecnosti hovoríme, že účelovú funkciu **maximalizujeme** resp. **minimalizujeme**, čo symbolicky zapisujeme takto:
2x + 3y   MAX resp. ***2x + 3y   MIN***.

V zadaní úlohy sa však objavili aj isté limity, ktoré obmedzujú množstvo dennej produkcie pečiva. Týkajú sa množstva surovín, ktoré je k dispozícii. Pre názornosť je výhodné zapísať si uvedené limity do tabuľky so spotrebou polotovarov:

Názov produktu	***Spotreba polotovarov***			***Predajná cena***
	vanilkové cesto	*čokoládová poleva*	*ovocný džem*	
Krehké FEDORNETY (1 balenie)	*0,5 kg*	*50 g*	–	*2 €*
Ovocné FEDORNETY (1 balenie)	*0,3 kg*	*60 g*	*0,2 kg*	*3 €*
Surovinové limity	*9 kg*	*1 kg*	*2 kg*	

Prebytkové vanilkového cesto s hmotnosťou *9 kg* musí vystačiť na výrobu *x* balení krehkého pečiva pri spotrebe *0,5 kg* na každé balenie a na *y* balení ovocného pečiva pri spotrebe *0,3 kg* na každé. Matematickou symbolikou toto obmedzenie vyjadríme ako nerovnosť

$$0{,}5\,x + 0{,}3\,y \le 9.$$

Prebytková čokoládová poleva s hmotnosťou *1 kg* musí vystačiť na výrobu *x* balení krehkého pečiva pri spotrebe *0,05 kg* na každé balenie a na *y* balení ovocného pečiva pri spotrebe *0,06 kg* na každé. Matematickou symbolikou toto obmedzenie vyjadríme ako nerovnosť

$$0{,}05\,x + 0{,}06\,y \le 1.$$

Prebytkový ovocný džem s hmotnosťou *2 kg* sa pridáva iba do *y* balení ovocného pečiva, pri spotrebe *0,2 kg* na každé. Matematickou symbolikou toto obmedzenie vyjadríme ako nerovnosť

$$0{,}2\,y \le 2.$$

Všetky tri nerovnosti majú platiť súčasne a spolu s triviálnymi nerovnosťami, ktoré vyjadrujú prirodzenú požiadavku na nezápornosť premenných x, y

$$x \ge 0,\ y \ge 0$$

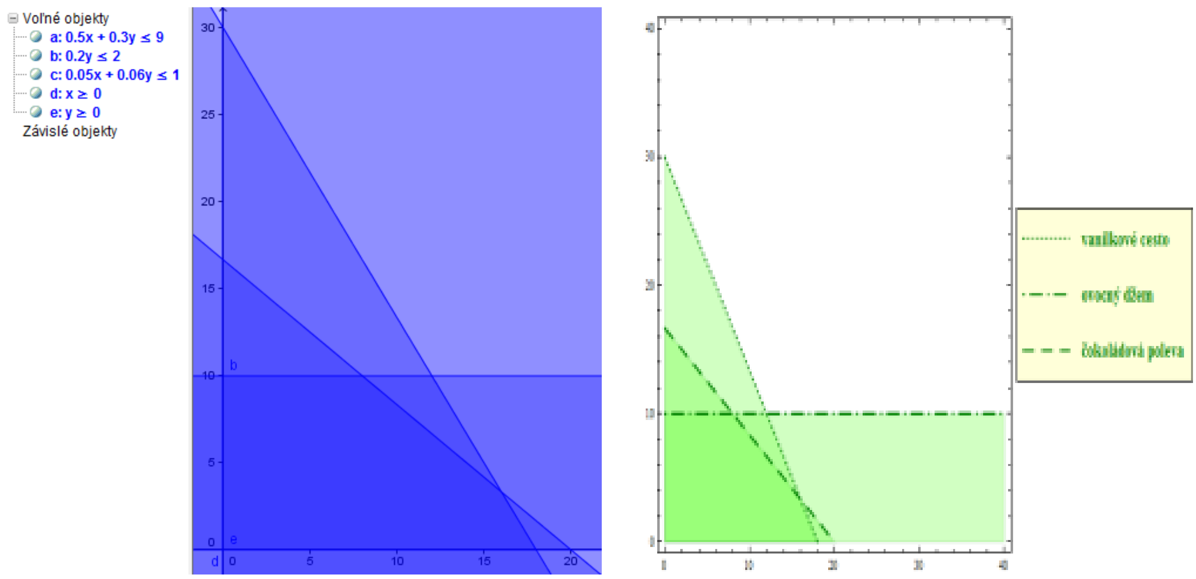
tvoria *sústavu nerovníc s neznámymi x, y.*

Všetky riešenia sústavy nerovníc

$$\begin{aligned} 0{,}5\,x + 0{,}3\,y &\le 9 \\ 0{,}05\,x + 0{,}06\,y &\le 1 \\ 0{,}2\,y &\le 2 \\ x &\ge 0 \\ y &\ge 0, \end{aligned}$$

ktorú sme dostali z podmienok riešiteľnosti zadanej úlohy, tvoria **množinu prípustných riešení úlohy**.

Riešením sústavy je každá usporiadaná dvojica čísel z oboru riešenia sústavy, po dosadení ktorých za x, y dostaneme z každej nerovnice sústavy pravdivý výrok. Využijeme názornú grafickú metódu a znázorníme riešenia sústavy v karteziánskej súradnicovej sústave. Z podmienok nezápornosti vyplýva, že obrazy všetkých riešení budú v prvom kvadrante, v prieniku polrovín určených zostávajúcimi tromi nerovnicami. Obrazom množiny prípustných riešení v oboch zvolených softvérových prostrediach je mnohouholník najtmavšej farby, ktorého strany ležia na hraničných priamkach príslušných polrovín (obr. 1).



Obrázok 1 Grafické riešenie sústavy nerovníc v DGS GeoGebra a v CAS Mathematica

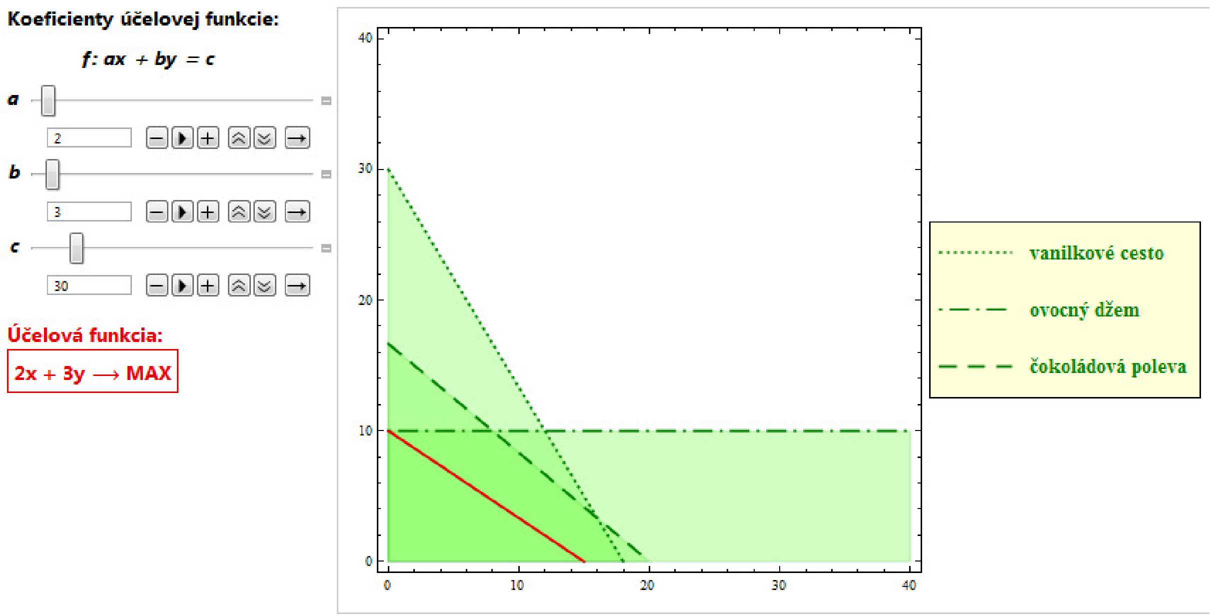
Naším cieľom je **nájsť také prípustné riešenie, pre ktoré má účelová funkcia maximálnu** resp. **minimálnu hodnotu**. Voláme ho **optimálne riešenie**.

Triviálnym prípustným riešením je usporiadaná dvojica [*0, 0*], ktorá vyjadruje, že kaviareň nebude produkovať trvanlivé pečivo z prebytkov, čo však jej majiteľovi neprinesie žiadny zisk (***0 €***).
Na prvý pohľad je zrejmé, že sústave vyhovuje aj usporiadaná dvojica [*1, 1*]. V kontexte zadania znamená výrobu 1 balenia krehkého pečiva a 1 balenia ovocného pečiva, ktoré prinesú zisk $2\cdot 1 + 3\cdot 1 =$ ***5 €***.
Keď postupne zvyšujme počet balení krehkého pečiva, pričom stále uvažujeme výrobu 1 balenia ovocného pečiva, dostaneme sa na hodnotu 17. Usporiadanej dvojici [*17, 1*] odpovedá zisk $2\cdot 17 + 3\cdot 1 =$ ***37 €***.
Podobne s jedným balením krehkého pečiva môže kaviareň vyrobiť najviac 10 balení ovocného pečiva. Usporiadanej dvojici [*1, 10*] odpovedá zisk $2\cdot 1 + 3\cdot 10 =$ ***32 €***.

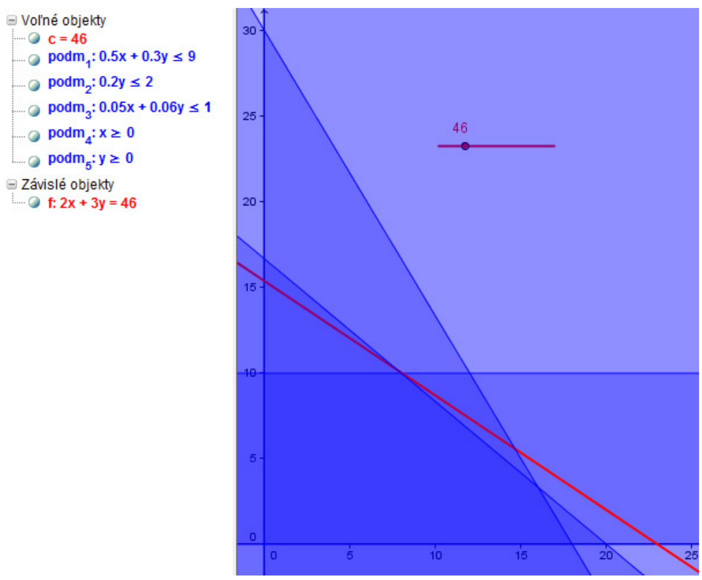
Spomedzi doteraz nájdených je najvýhodnejšie produkovanie 17 balení krehkého a 1 balenia ovocného pečiva, čo je spojené so ziskom 37 €. Na definitívne určenie riešenia úlohy by sme však týmto spôsobom museli porovnať všetky riešenia sústavy nerovníc z hľadiska výšky zisku. Šlo by o pomerne zdĺhavý postup riešenia.

Pozrime sa ešte raz na matematický model reálneho problému a na možnosti jeho riešenia matematickými metódami. Do súradnicovej sústavy so zobrazenou množinou prípustných riešení zakreslíme aj priamku, ktorá je grafom účelovej funkcie pre ľubovoľnú zvolenú hodnotu parametra c. Grafom účelovej funkcie pre rôzne hodnoty parametra c sú navzájom rovnobežné priamky. Hľadáme taký bod polygónu, cez ktorý prechádza "najvyššie" resp. "najnižšie" umiestnená rovnobežka spomedzi všetkých potenciálnych grafov účelovej funkcie. Tento bod je obrazom optimálneho riešenia úlohy.

Využijeme dynamiku softvérového riešenia a použijeme nástroj na manipulovanie hodnoty parametra c, napr. manipulátor v CAS Mathematica (obr. 2) resp. posuvník v DGS GeoGebra (obr. 3).



Obrázok 2 Ukážka manipulátorov hodnôt parametrov *a*, *b*, *c* v CAS Mathematica (c = 30)

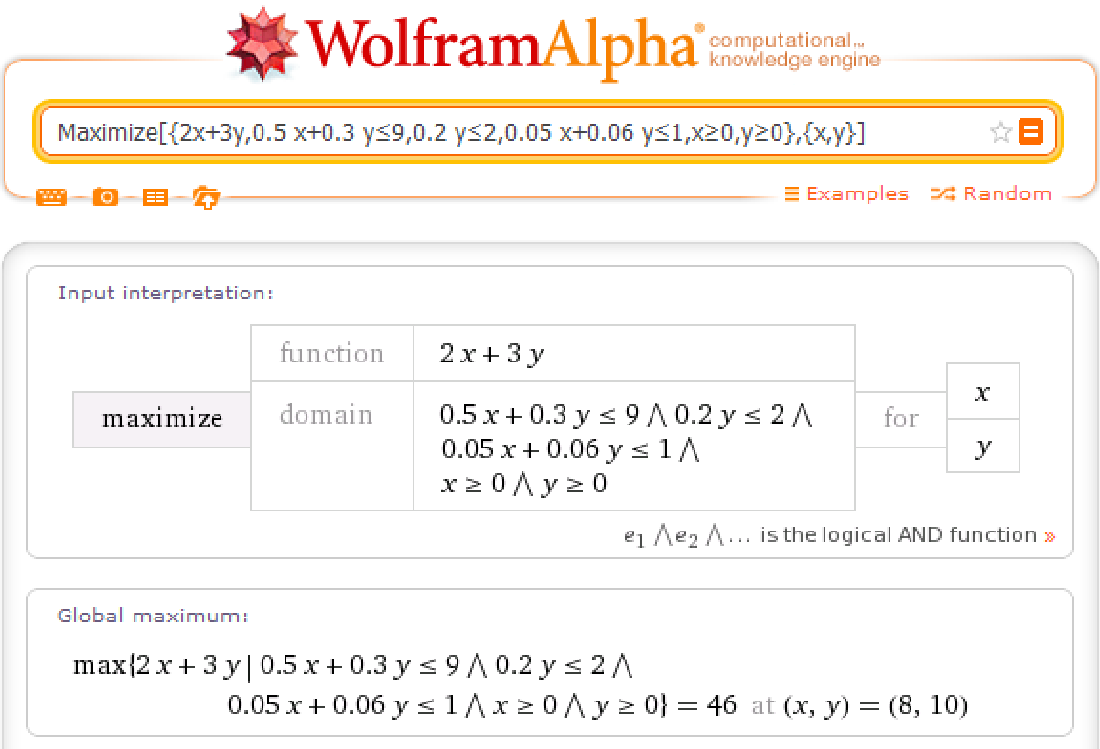


Obrázok 3 Ukážka posuvníka pre hodnotu parametra *c* v DGS GeoGebra (optimálne riešenie: c = 46)

Grafické riešenie môžeme potvrdiť exaktným softvérovým výpočtom. V prostredí Mathematica (resp. vo webovej online aplikácii www.wolframalpha.com) zadáme príkaz:

$$\text{Maximize}[\{2x + 3y, 0.5\,x + 0.3\,y \leq 9, 0.2\,y \leq 2, 0.05\,x\ +\ 0.06\,y \leq 1, x \geq 0, y \geq 0\}, \{x, y\}].$$

V prípade minimalizačnej úlohy použijeme príkaz Minimize.

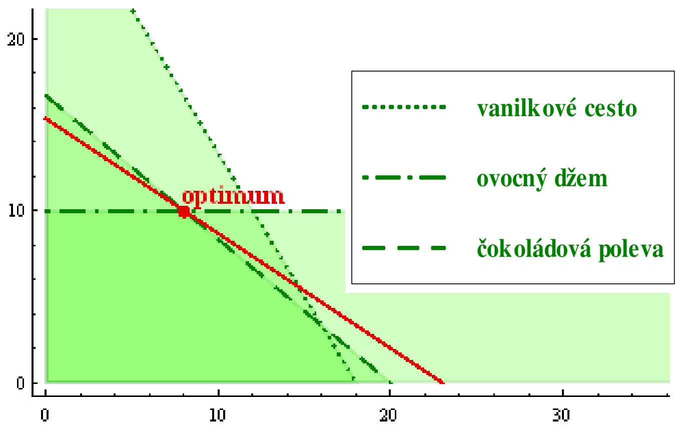


Obrázok 4 Softvérová odpoveď na požiadavku maximalizácie

Ďalšia časť vyučovacej jednotky je zameraná na upevnenie vedomostí. V záujme rozvoja hodnotiaceho a kritického myslenia, formovania kompetencií analyzovať, zdôvodňovať a argumentovať, volíme úlohy orientované na vyššie úrovne poznávacieho procesu žiakov. Všetky úlohy nadväzujú na kontext prvej úlohy. Ich riešenie nie je podmienené uplatnením technológií, použitie softvéru pri riešení však odporúčame.

Úloha 2

Ak by sa niekedy stalo, že sa na priamy konzum v kaviarni spotrebuje väčšie množstvo niektorého z polotovarov, bude nájdené riešenie stále optimálne?



Obrázok 5 Obraz optimálneho riešenia úlohy 1

Z postupu pri grafickej metóde riešenia je zrejmé, že obraz optimálneho riešenia leží na prieniku dvoch hraničných priamok polrovín (obr. 5). Prvá polrovina odpovedá podmienke plynúcej z obmedzenia zásoby ovocného džemu, druhá modeluje limit zásoby čokoládovej polevy. Pre všetky body na hraničnej priamke platí, že po dosadení ich súradníc za neznáme do nerovnice nastáva rovnosť. V kontexte úlohy to znamená, že zásoby príslušnej suroviny sa použijú bezo zvyšku. Čiže optimálnym výrobným plánom sa spotrebujú všetky deklarované prebytky ovocného džemu a čokoládovej polevy.

Úloha 3

Aké množstvo vanilkového cesta zostane nevyužité? Konkurenčná firma ponúka aj menšie balenie čokoládovej polevy vhodnej do stroja na výrobu pečiva FEDORNETY, ale z dôvodu cenovej nevýhodnosti ju doteraz majiteľ nekupoval. Je možné zvýšiť zisk z výroby dokúpením 500 gramového balenia čokoládovej polevy v cene 9,50 € ?

Zostatkové množstvo vanilkového cesta vypočítame z prvej nerovnosti $0,5\ x + 0,3\ y \leq 9$. Ľavá strana vyjadruje množstvo spotrebovaného cesta pri výrobe x balení krehkého pečiva a y balení ovocného pečiva. Pravá strana toto množstvo v súlade so zadaním limituje. Po dosadení optimálnych hodnôt za neznáme sa hodnota ľavej strany rovná $0,5 \cdot 8 + 0,3 \cdot 10 = 7\ kg$, čo znamená, že z pôvodných 9 kg zostane prebytok *2 kg* vanilkového cesta.

Ako vidno v nasledujúcej tabuľke, dokúpenie čokoládovej polevy pozmení pôvodný matematický model úlohy len v hodnote jednej konštanty.

Názov produktu	***Spotreba polotovarov***			***Predajná cena***
	vanilkové cesto	*čokoládová poleva*	*ovocný džem*	
Krehké FEDORNETY (1 balenie)	*0,5 kg*	*50 g*	*–*	*2 €*
Ovocné FEDORNETY (1 balenie)	*0,3 kg*	*60 g*	*0,2 kg*	*3 €*
Surovinové limity	*9 kg*	~~*1 kg*~~ *1,5 kg*	*2 kg*	

Druhú nerovnicu nahradí nerovnica $0,05\ x + 0,06\ y \leq 1,5$, ktorá sa od pôvodnej líši absolútnym členom na pravej strane. Zmena absolútneho koeficientu lineárnej funkcie sa prejaví posunom hraničnej priamky v smere súradnicovej osi y. Zmení sa len množina prípustných riešení, účelová funkcia zostane pôvodná.

Úlohu žiaci vyriešia graficky alebo algebrickým softvérovým výpočtom, pomocou príkazu

Maximize[$\{2x + 3y, 0.5\ x + 0.3\ y \leq 9, 0.2\ y \leq 2, 0.05\ x\ +\ 0.06\ y \leq 1.5, x \geq 0, y \geq 0\}, \{x, y\}$].

Po dokúpení polevy je optimálna výroba 12 balení krehkých FEDORNETY, 10 balení ovocných FEDORNETY, s tržbou 54 €. Neznamená to však, že výroba s dokúpenou polevou je výhodná z hľadiska zisku. Hodnota účelovej funkcie predstavuje iba tržbu z predaja, nezohľadňuje náklady. Odpočítaním nákupnej ceny za čokoládovú polevu od tržby vyjadríme zisk:

54 € - 9, 50 € = 44,50 €.

Vidíme, že zisk klesol oproti predošlému, z čoho vyplýva, že dokúpením polevy v ponúkanej cene majiteľ nezvýši svoj zisk z výroby pečiva.

Úloha 4

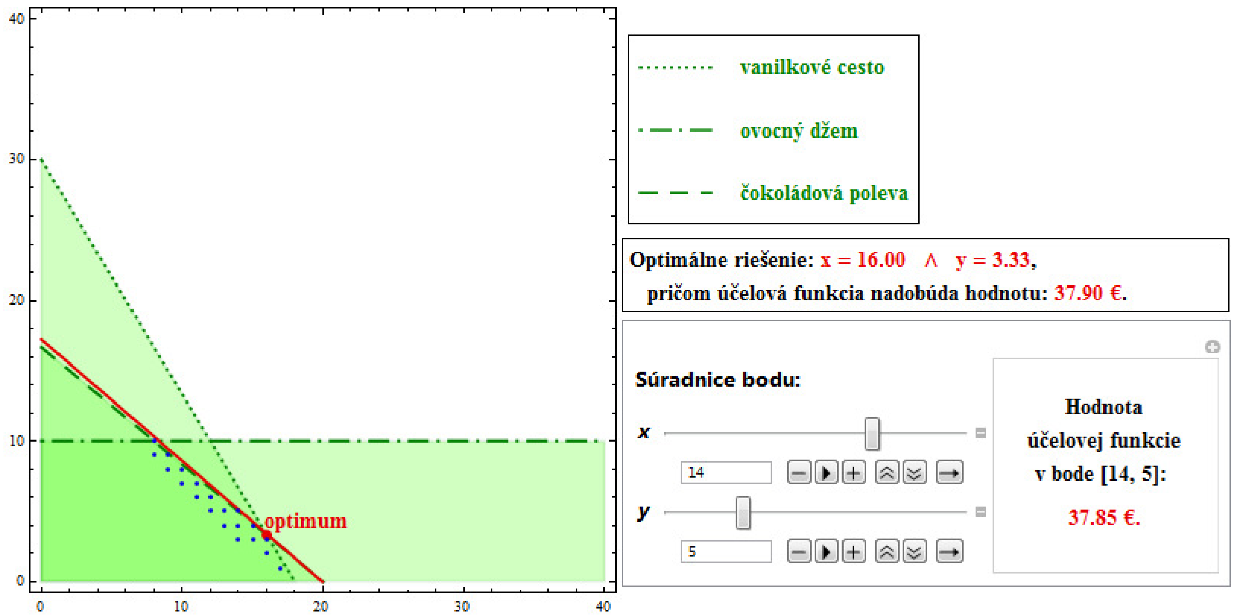
Rastúca konkurencia sa prejavila znížením záujmu o trvanlivé pečivo FEDORNETY až do takej miery, že objednávky odberateľov klesli na polovicu. Majiteľ kaviarne zistil, že ak chce konkurovať výrobkom novootvorenej cukrárne, musí znížiť cenu krehkých koláčikov aspoň o 10 centov a cenu ovocných koláčikov aspoň o 75 centov. Ako to ovplyvní optimálny výrobný plán trvanlivého pečiva FEDORNETY?

Zmena cien sa v modeli prejaví zmenou účelovej funkcie: $1{,}9\,x + 2{,}25\,y$ *MAX*. Množina prípustných riešení závisí len od podmienok, čiže zostane pôvodná.

Úlohu žiaci vyriešia graficky alebo algebrickým softvérovým výpočtom, pomocou príkazu

$$\text{Maximize}\left[\left\{\begin{matrix}1.9x + 2.25y, 0.5\,x + 0.3\,y \le 9, 0.2\,y \le 2, 0.05\,x\ +\ 0.06\,y \le 1,\\ x \ge 0, y \ge 0\end{matrix}\right\}, \{x, y\}\right].$$

Takto určené optimálne riešenie: 16 balení krehkých FEDORNETY, 3,33 balení ovocných FEDORNETY, s tržbou 37,90 €, je iné ako v pôvodnom modeli. Toto riešenie však **nespĺňa podmienky úlohy**, nakoľko premenné x, y vyjadrujú počty balení a môžu nadobúdať iba celočíselné hodnoty. Takéto úlohy sa nazývajú aj **celočíselné optimalizačné úlohy**. Grafickým znázornením optimálneho riešenia bude taký bod s celočíselnými súradnicami z množiny prípustných riešení (polygón), ktorý má najmenšiu vzdialenosť od priamky, ktorá je grafom účelovej funkcie a dotýka sa polygónu. Nájdeme ho porovnaním hodnôt účelovej funkcie v bodoch s celočíselnými súradnicami. Pre názornosť ich vyznačíme v grafe (obr. 6).



Obrázok 6 Hľadanie celočíselného riešenia optimalizačnej úlohy

Opísaným postupom sme zistili, že za podmienky celočíselnosti súradníc účelová funkcia nadobúda maximálnu hodnotu v bode [14, 5]. Čiže optimálny denný výrobný plán trvanlivého pečiva je *14 balení* prvého druhu a 5 *balení* druhého druhu.

Majiteľovi to prinesie zisk vo výške $1{,}9 \cdot 14 + 2{,}25 \cdot 5 = 37{,}85$ €. To je menej ako pôvodný zisk 46 € pred znížením cien, ale viac ako polovica z tejto hodnoty, čo je pri znížených objednávkach maximálna tržba z predaja bez znižovania cien. Zníženie ceny je pre majiteľa z hľadiska ziskovosti, ako aj z hľadiska spotreby prebytkov, výhodné.

Požiadavku celočíselnosti riešenia v algebrickom softvérovom riešení zadáme parametrom Integers, konkrétne

$$\text{Maximize}[\left\{\begin{matrix} 1.9x + 2.25y, 0.5\,x + 0.3\,y \leq 9, 0.2\,y \leq 2, \\ 0.05\,x \;+\; 0.06\,y \leq 1, x \geq 0, y \geq 0 \end{matrix}\right\}, \{x, y\}, \text{Integers}].$$

Posledná zo série úloh (úloha 5) na prvý pohľad vedie k modelu s viacerými neznámymi, na základe zadania je však možné ich eliminovať a riešiť opäť úlohu s dvomi neznámymi, teda s rovinnou grafickou reprezentáciou. Ak riešenie predošlých úloh žiakom nerobilo ťažkosti, je vhodné úlohu riešiť skupinovou formou (4-členné skupiny). Učiteľ v roli konzultanta nevstupuje do procesu riešenia v skupinách, riadi prezentáciu žiackych riešení, prípadne žiakov navedie na nižšie opísaný postup riešenia.

Úloha 5

Obchodná značka FEDORNETY obstála v konkurenčnom boji na trhu s trvanlivým pečivom. Fedor medzičasom otvoril aj prevádzku v inom meste, ktorá týždenne produkuje 250 balení pečiva. Tie, spolu so 150 baleniami týždenne z prvej kaviarne, sú určené na distribúciu do troch potravinových veľkoskladov v regióne. S prvým mal Fedor zmluvne dohodnutý týždenný odber 140 balení, rovnako s tretím a do druhého každý týždeň dodával 120 balení. Prepravná spoločnosť účtovala náklady v závislosti od vzdialenosti a od hmotnosti a objemu tovaru. Prepočet nákladov na 1 balenie pečiva je uvedený v nasledujúcej tabuľke:

	Veľkosklad I	*Veľkosklad II*	*Veľkosklad III*
Kaviareň I	*0,12 €*	*0,10 €*	*0,16 €*
Kaviareň II	*0,16 €*	*0,18 €*	*0,12 €*

Pri akom distribučnom pláne sú náklady na prepravu najnižšie?

Úlohou je rozdeliť týždenne vyprodukované balenia pečiva z dvoch výrobných prevádzok do troch veľkoskladov tak, aby boli dodržané zmluvne dohodnuté množstvá a aby cena za prepravu bola najnižšia možná.

Prepravované počty balení vyjadríme na základe daných údajov a vzťahov pomocou dvoch premenných x, y:

počet balení distribuovaných z kaviarne I do veľkoskladu I ... ***x***
počet balení distribuovaných z kaviarne I do veľkoskladu II ... ***y***
počet balení distribuovaných z kaviarne I do veľkoskladu III ... ***150 - (x + y)***
počet balení distribuovaných z kaviarne II do veľkoskladu I ... ***140 - x***
počet balení distribuovaných z kaviarne II do veľkoskladu II ... ***120 - y***
počet balení distribuovaných z kaviarne II do veľkoskladu III ... ***140 – (150 - (x + y)) = x + y - 10***

Všetko prehľadne zapíšeme do tabuľky:

	Veľkosklad I		*Veľkosklad II*		*Veľkosklad III*	
	preprava jedného balenia	*počet prepravených balení*	*preprava jedného balenia*	*počet prepravených balení*	*preprava jedného balenia*	*počet prepravených balení*
Kaviareň I	*0,12 €*	x	*0,10 €*	y	*0,16 €*	$150 - (x + y)$
Kaviareň II	*0,16 €*	$140 - x$	*0,18 €*	$120 - y$	*0,12 €*	$x + y - 10$

Všetky výrazy vyjadrujúce počty balení musia spĺňať podmienku celočíselnosti a nezápornosti. Riešením sústavy nerovníc

$$\begin{aligned} x &\geq 0 \\ y &\geq 0 \\ 150 - (x + y) &\geq 0 \\ 140 - x &\geq 0 \\ 120 - y &\geq 0 \\ x + y - 10 &\geq 0, \end{aligned}$$

ktorú sme dostali z podmienok riešiteľnosti zadanej úlohy, je množina prípustných riešení úlohy.

Minimalizáciu nákladov na prepravu pečiva z výroby do veľkoskladov vyjadruje účelová funkcia

$$0{,}12\, x + 0{,}10\, y + 0{,}16\, (150 - x - y) + 0{,}16\, (140 - x) + 0{,}18\, (120 - y) + 0{,}12\, (x + y - 10) \quad MIN.$$

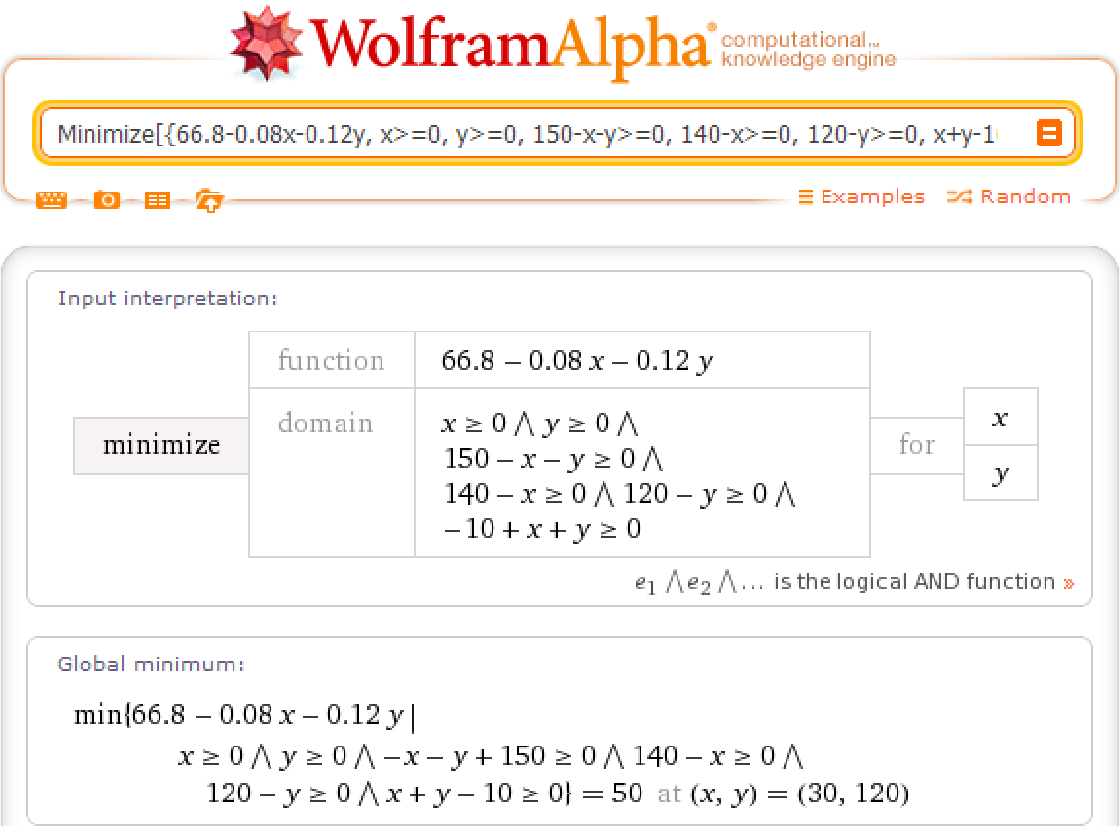
Zjednodušený predpis účelovej funkcie je $-\,0{,}08\, x - 0{,}12\, y + 66{,}8 \quad MIN.$

Úlohu vyriešime graficky (obr. 8) aj exaktným softvérovým výpočtom (obr. 7) použitím príkazu

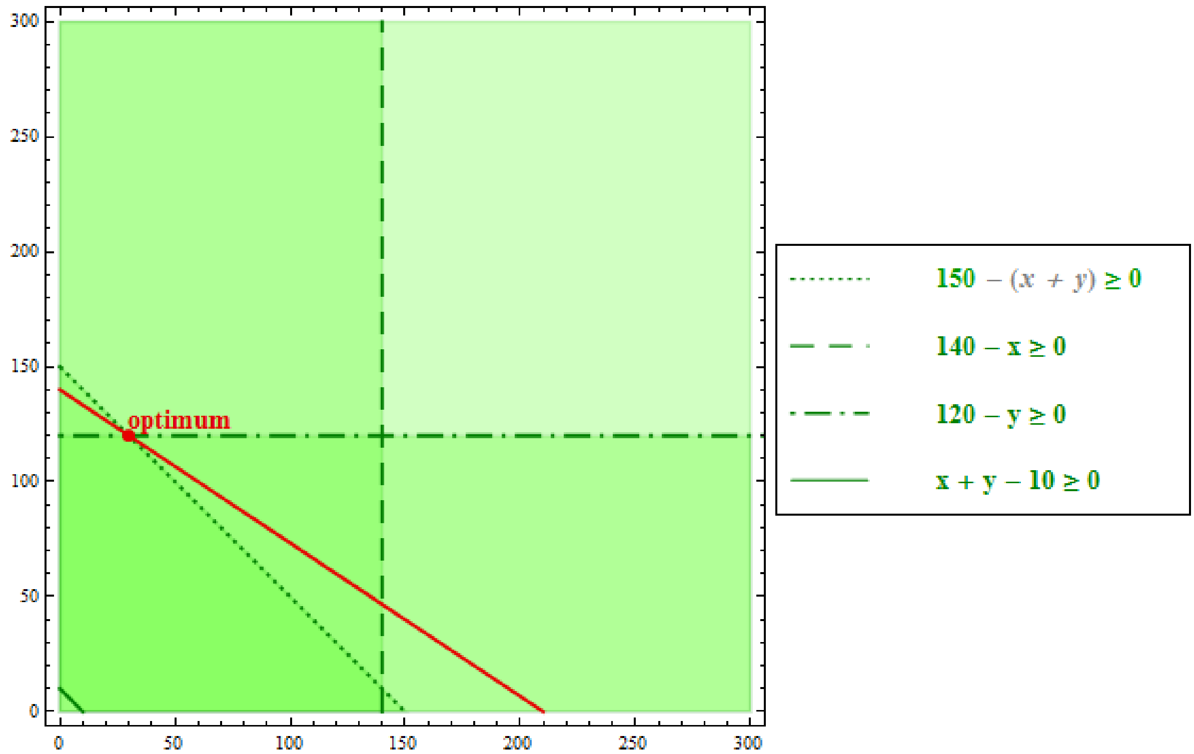
$$\text{Minimize}[\left\{\begin{matrix} 66.8 - 0.08\text{x} - 0.12\text{y}, 150 - \text{x} - \text{y} \geq 0, 140 - \text{x} \geq 0, \\ 120 - y \geq 0, x + y - 10 \geq 0, x \geq 0, y \geq 0 \end{matrix}\right\}, \{x, y\}].$$

Optimálny distribučný plán trvanlivého pečiva z hľadiska minimálnych prepravných nákladov je zapísaný v nasledujúcej tabuľke.

	Veľkosklad I	*Veľkosklad II*	*Veľkosklad III*
Kaviareň I	*30 balení*	*120 balení*	*0 balení*
Kaviareň II	*110 balení*	*0 balení*	*140 balení*



Obrázok 7 Algebrické riešenie úlohy 5



Obrázok 8 Grafické riešenie úlohy 5

3.1 Námety na žiacke projekty

Fázu precvičenia v danej vyučovacej jednotke sme realizovali projektovou metódou. Žiaci na vypracovaní projektov pracovali v trojčlenných skupinách, každá skupina dostala vlastné zadanie optimalizačnej úlohy. Cieľom projektu bolo

- vyriešiť úlohu použitím zvolených IKT prostriedkov (v rámci 1 vyučovacej hodiny),
- prezentovať riešenie v triede (časovo obmedzená prezentácia: 3 minúty),
- zhodnotiť prezentované riešenia spolužiakov.

Zadania úloh sme čerpali z článku Analytická geometria verzus lineárna optimalizácia (Timková, 2004/2005) a z webovej výukovej aplikácie dostupnej na http://web.ics.upjs.sk/grulp/ (Timková, 2001), niektoré z nich sú upravené. Vzorové riešenia sú naprogramované v CAS Mathematica (príloha 1).

Zadanie 1

Školský bufet s rýchlym občerstvením ponúka 2 druhy bagiet vlastnej výroby: syrovo - šunkovú a šunkovú. Pripravujú sa zo surovín: bageta, šunka, syr a zeleninový šalát. Konkrétne na jednu syrovo - šunkovú bagetu sa použije jedna tretina bagety, 5 dag šunky, 4 dag syra a 10 dag zeleninového šalátu. Výroba šunkovej bagety spotrebuje jednu tretinu z celej bagety, 5 dag šunky a 20 dag zeleninového šalátu. Majiteľka bufetu uzavrela s miestnou pekárňou dohodu o dennej dodávke 60 kusov bagiet a v neďalekom diskonte nakupuje každý deň 6 kg šunky, 2 kg syra a 27 kg zeleninového šalátu.

Koľko kusov ktorých bagiet má majiteľka bufetu vyrobiť, aby dosiahla čo najvyšší zisk, ak zisk z predaja jednej šunkovej bagety je 0,35 € a zo syrovo - šunkovej 0,42 € ?

Matematický model:

$$
\begin{aligned}
&1/3\,x + 1/3\,y \le 60\\
&0{,}05\,x + 0{,}05\,y \le 6\\
&0{,}04\,x \le 2\\
&0{,}1\,x + 0{,}2\,y \le 27\\
&x \ge 0\\
&y \ge 0
\end{aligned}
$$

$$0{,}42\,x + 0{,}35\,y \quad MAX$$

Zadanie 2

Zmrzlinár MRÁZIK sa na začiatku leta rozhodol, že bude vyrábať len smotanovú a čokoládovú zmrzlinu. Dohodol si s farmou Mliečko mesačné dodávky 95 litrov smotany, 200 litrov polotučného mlieka a s čokoládovňou Orion dodávky 60 litrov horkej čokolády. Firma Cukrík mu bude pravidelne dodávať 110 kilogramov kryštálového cukru. Pri uvedených množstvách mohol zmrzlinár využiť výhodné veľkoobchodné ceny.

Mrázik potrebuje na výrobu 1 litra smotanovej zmrzliny 0,5 l smotany, 0,2 litra polotučného mlieka a 0,4 kilogramov kryštálového cukru. Príprava 1 litra čokoládovej zmrzliny si vyžaduje 0,2 l smotany, 0,4 litra polotučného mlieka, 0,3 l horkej čokolády a 0,5 kg kryštálového cukru. Jednu dávku (t.j. 50 ml) smotanovej zmrzliny predáva zmrzlinár Mrázik po 0,3 €, dávku čokoládovej po 0,35 €.

Koľko litrov smotanovej a koľko litrov čokoládovej zmrzliny má Mrázik vyrobiť z daných množstiev surovín, aby mal čo najväčší zisk?

Matematický model:

$$0{,}5\,x + 0{,}2\,y \le 95$$
$$0{,}2\,x + 0{,}4\,y \le 200$$
$$0{,}3\,y \le 60$$
$$0{,}4\,x + 0{,}5\,y \le 110$$
$$x \ge 0$$
$$y \ge 0$$

$$6\,x + 7\,y \quad MAX$$

Zadanie 3

Na farme MLIEČKO kŕmia dobytok dvoma druhmi krmív: senom a silážou, v súlade s predpismi na produkciu BIOpotravín. Aby vyprodukované mlieko spĺňalo prísne normy, sleduje sa splnenie určitých výživových kritérií v dennej kŕmnej dávke. Tá by mala obsahovať aspoň 1900 gramov bielkovín, aspoň 180 gramov vápnika a aspoň 5 gramov vitamínu C. 0bsah jednotlivých výživných látok v používaných krmivách a ich ceny sú uvedené v nasledujúcej tabuľke.

Krmivo	**Obsah výživných látok**			**Nákupná cena**
	bielkoviny	**vápnik**	**vitamín C**	
	(g/kg)	(g/kg)	(mg/kg)	(€/kg)
Seno	*50*	*10*	*50*	*0,01*
Siláž	*70*	*6*	*100*	*0,02*

Aké množstvá jednotlivých krmív má obsahovať denná kŕmna dávka, ak má spĺňať výživové kritériá a jej cena má byť najnižšia možná?

Matematický model:

$$50\,x + 70\,y \ge 1900$$
$$10\,x + 6\,y \ge 180$$
$$0{,}050\,x + 0{,}100\,y \ge 5$$
$$x \ge 0$$
$$y \ge 0$$

$$0{,}01\,x + 0{,}02\,y \quad MIN$$

Zadanie 4

Čokoládovňa ORION doviezla 800 kg kávy, 300 kg kakaa a 200 kg cukru. Rozhodla sa spracovať tieto suroviny na kakaový sirup a obľúbený nápoj Kavovit. Predajné ceny vyprodukovaných nápojov a spotrebu kávy, kakaa a cukru na liter nápoja uvádza nasledujúca tabuľka.

	Kakaový sirup (kg/l)	**Kavovit (kg/l)**
Káva	*0*	*0,5*
Kako	*0,6*	*0,2*
Cukor	*0,4*	*0,1*
Predajná cena (€/liter)	*1,3 €*	*2 €*

Aké množstvá jednotlivých nápojov má firma vyrobiť z dovezených surovín, aby jej tržba bola čo najvyššia?

Matematický model:

$$0{,}5\,y \le 800$$
$$0{,}6\,x + 0{,}2\,y \le 300$$
$$0{,}4\,x + 0{,}1\,y \le 200$$
$$x \ge 0$$
$$y \ge 0$$
$$1{,}3\,x + 2\,y \quad MAX$$

Zadanie 5

O týždeň sa koná predajná výstava ručných remesiel. Firma Modrotlač chce ponúknuť dva vzory šatoviek: jeden (A) s malými a druhý (B) s väčšími kvietkami. Má k dispozícii 100 metrový bal plátna, 12 kg farbiva a jedného pracovníka so 42 hodinovým týždenným pracovným časom. Spotreba farbiva, časová náročnosť a cena za 1 m šatovky sú uvedené v nasledujúcej tabuľke.

Textília	**Výrobné činitele**		
	zisk	**spotreba farbiva**	**pracnosť**
	(€/m)	(kg/m)	(hod/m)
A	*50*	*10*	*50*
B	*70*	*6*	*100*

Určte taký výrobný program, ktorý by zabezpečil maximálny možný zisk.

Matematický model:

$0{,}1\,x + 0{,}2\,y \leq 12$
$0{,}5\,x + 0{,}25\,y \leq 42$
$x \geq 0$
$y \geq 0$

$1{,}5\,x + 2\,y \quad MAX$

Zadanie 6

Prepravná firma Špedit & syn, ktorá vlastní jedno auto značky "C20" s nosnosťou 2 t a jedno auto značky "C30" s nosnosťou 3,5 t, dostala zakázku prepraviť dnes 4 tony tvárnic. U oboch áut sa spotreba pri väčšom zaťažení zvyšuje, u "C20" je vyjadrená funkciou 10 + 2x, u "C30" funkciou 13 + x litrov nafty na 1 kilometer, kde x označuje hmotnosť prepravovaného nákladu v tonách. Špedit má dlhodobo prenajatú nakladaciu rampu, a to na 4 hodiny denne, pritom plné naloženie každého z áut tvárnicami trvá 3 hodiny, u menšieho nákladu je to úmerne menej.

Ako má firma Špedit rozložiť náklad na svoje dve autá, ak chce minimalizovať prepravné kilometrové náklady ?

Matematický model:

$(3/2)\,x + (6/7)\,y \leq 4$
$x + y = 4$
$x \leq 2$
$y \leq 3{,}5$
$x \geq 0$
$y \geq 0$

$10 + 2\,x + 13 + y \quad MIN$

Zadanie 7

Pekár KOLÁČIK vyrába ako polotovar lístkové a úsporné cesto z múky a tuku. Požiadavky na suroviny a predajná cena jedného kilogramu sú uvedené v tabuľke.

Cesto	**Spotreba surovín**		**Predajná cena**
	múka	**tuk**	
	(g)	(g)	(€)
Lístkové	*500*	*400*	*5,00*
Úsporné	*700*	*200*	*3,50*

Určte optimálny výrobný plán, ak má pekár k dispozícií 10 kg múky a 5 kg tuku.

Matematický model:

$0{,}5\,x + 0{,}7\,y \leq 10$
$0{,}4\,x + 0{,}2\,y \leq 5$
$x \geq 0$
$y \geq 0$
$5\,x + 3{,}5\,y \quad MAX$

Zadanie 8

Počítačová spoločnosť ILTEN vyrába dva populárne modely klávesníc. Každý z modelov zhotovia za hodinu, ale zatiaľ čo model TT1 potrebuje len 7,5 minúty na testovanie, model TT2 sa testuje až 30 minút. Súčasné možnosti spoločnosti sú také, že mesačne sú schopní vyrábať 45 000 hodín a testovať 15 000 hodín. Zisk z predaja modelu TT1 je 5 € a z modelu TT2 za každý kus 8 €.

Aký je najvyšší možný mesačný zisk spoločnosti bez toho, aby zvyšovala svoje súčasné kapacity?

Matematický model:

$$x + y \leq 45000$$
$$7{,}5\,x + 30\,y \leq (15000 \cdot 60)$$
$$x \geq 0$$
$$y \geq 0$$
$$5\,x + 8\,y \quad MAX$$

Zadanie 9

Pri príprave vianočného pečiva sa gazdinka rozhoduje medzi dvomi receptami - orechové rezy a dvojfarebné rezy. Múky, vajíčok, cukru a ďalších prísad má dosť, ale čokolády je doma len 0,5 kg, tuku 0,4 kg a orechov 1kg. Spotreba čokolády, orechov a tuku v gramoch na jednu dávku pre jednotlivé recepty je daná v nasledujúcej tabuľke.

Recept	**Spotreba surovín na 1 dávku**		
	čokoláda	**orechy**	**tuk**
Orechové rezy	*100 g*	*200 g*	*50 g*
Dvojfarebné rezy	*50 g*	*0 g*	*80 g*

Aké pečivo má gazdinka napiecť, ak nechce robiť ďalšie nákupy, a chce napiecť čo najviac z toho, čo je práve doma?

Matematický model:

$$0{,}1\,x + 0{,}05\,y \leq 0{,}5$$
$$0{,}1\,x \leq 1$$
$$0{,}05\,x + 0{,}08\,y \leq 0{,}4$$
$$x \geq 0$$
$$y \geq 0$$
$$x + y \quad MAX$$

Zadanie 10

Na poľnohospodárskom družstve sa ošípané vykrmujú zemiakmi a repou. Zemiaky obsahujú 3% bielkovín a 15% uhľohydrátov. Repa obsahuje 1% bielkovín a 10% uhľohydrátov. Obidve krmivá obsahujú 2% minerálnych solí. Ošípané denne potrebujú minimálne 0,3 ton bielkovín a 2,25 ton uhľohydrátov, ale potrava nesmie obsahovať viac ako 0,5 ton minerálnych solí. Cena 1 tony kŕmnej repy je 50 € a kŕmnych zemiakov 100 €.

Koľko zemiakov a repy sa má skŕmiť, aby kŕmenie bolo čo najlacnejšie?

Matematický model:

$0{,}03\,x + 0{,}01\,y \geq 0{,}3$
$0{,}15\,x + 0{,}1\,y \geq 2{,}25$
$0{,}02\,x + 0{,}02\,y \leq 0{,}5$
$x \geq 0$
$y \geq 0$

$100\,x + 50\,y \quad MIN$

Zadanie 11

Vo farmaceutickej firme vyrábajú rôzne bylinkové čaje. K dispozícii majú 1 kg medovky, 1,3 kg mäty piepornej, 1 kg žihľavy a 1 kg repíka lekárskeho. Vypočítajte, aké druhy čajov má firma vyrobiť, aby dosiahla maximálny zisk, ak hmotnosti uvedených bylín vyjadrené v gramoch, ktoré sú potrebné na výrobu jednotlivých čajov a ich ceny sú nasledovné:

Čaj	**Spotreba bylín**				**Predajná cena**
	medovka	**mäta**	**repík**	**žihľava**	
	(g)	(g)	(g)	(g)	(€)
Upokojujúci	*20*	*15*	*15*	*0*	*31*
Povzbudzujúci	*10*	*15*	*0*	*25*	*35*

Matematický model:

$0{,}02\,x + 0{,}01\,y \leq 1$
$0{,}015\,x + 0{,}015\,y \leq 1{,}3$
$0{,}015\,x \leq 1$
$0{,}025\,y \leq 1$
$x \geq 0$
$y \geq 0$

$31\,x + 35\,y \quad MAX$

3.2 Poznámky a postrehy z vyučovania

Vyučovanie podľa opísanej metodiky sa opakovane u žiakov stretlo s pozitívnym ohlasom. Obsah vyučovacej jednotky ich mimoriadne zaujal, nemali problém porozumieť matematickému modelovaniu lineárnych optimalizačných úloh a princípu riešenia.

Prvotné uplatnenie počítačom podporovaného vyučovania matematiky malo výrazný motivačný efekt. Na druhej strane však žiakom chýbali zručnosti v ovládaní nástrojov DGS, či webovej CAS aplikácie. To odvádzalo pozornosť žiakov od matematickej podstaty problému, v niektorých prípadoch viedlo k bezmyšlienkovitej činnosti kopírovania projekčne zobrazených postupov učiteľa. V záujme predídenia opísanej situácie odporúčame zaradiť počítačom podporovanú výučbu na hodinách predchádzajúcich tejto metodike. Ak to predsa nie je možné, je efektívnejšie venovať osobitný čas zoznámeniu sa s potrebnými softvérovými nástrojmi, resp. používať iba jeden nový softvérový prostriedok, ostatné nahradiť manuálnymi výpočtami, či postupmi.

S istou časovou záťažou musíme počítať aj v prípade používania vlastných žiackych prenosných počítačov. Napriek požiadavke na inštaláciu a poskytnutiu inštalačných súborov s časovým predstihom približne tretina triedy nemala na začiatku hodiny na počítačoch nainštalované potrebné softvérové vybavenie, niektorí nemali ani skopírované inštalačné súbory. Činnosť spojená s inštaláciou zabrala 15 minút, ostatní žiaci mali náhradnú činnosť.

Po matematickej stránke žiakom riešenie projektov nerobilo takmer žiadne ťažkosti. Pomocou učebného textu, na ktorý sa odvoláva navrhnutá metodika (používaného na vyučovaní) žiaci vo všetkých zadaniach dospeli k správnemu matematickému modelu. Výnimkou bola skupina triedy s rozšíreným vyučovaním jazykov, ktorej chýbali zručnosti v ovládaní softvérových nástrojov. Tam sme od zadania projektov upustili a úlohy sme riešili na najbližších hodinách spoločne.

Z pohľadu učiteľa je dôležité overiť správnosť všetkých riešení v dobe pred prezentáciou, lebo v prípade chybného riešenia by vyhradený čas na prezentáciu riešenia nemusel byť postačujúci.

Rovnako dôležitou úlohou učiteľa je upozorniť žiakov na „netypické“ výsledky, konkrétne na situáciu s nekonečným počtom riešení ako aj na optimálne riešenie matematicky vyjadrené usporiadanou dvojicou [0; y] alebo [x; 0].

Vonkajšou motiváciou pre žiakov bolo pridelenie bonusového bodu za správne riešenie, interpretáciu riešenia v kontexte zadania a kvalitnú prezentáciu každému členovi skupiny. O pridelení bodov rozhodoval učiteľ. Žiaci boli vopred informovaní o spôsobe prezentácie výsledkov, vrátane trojminútového časového obmedzenia, ktoré bolo striktne dodržiavané. Vo väčšine prípadov bol tento čas postačujúci. Následne mali spolužiaci priestor na otázky a náhodne vybraný žiak jednou vetou zhodnotil prezentované riešenie, s čím mali žiaci najväčšie ťažkosti (úplne sa vyhýbali negatívnej kritike). Z toho vyplýva potreba častejšieho zaradenia podobných foriem práce do vyučovacieho procesu.

4 NELINEÁRNE OPTIMALIZAČNÉ ÚLOHY

Navrhnutý systém úloh pozostáva zo šiestich nelineárnych optimalizačných úloh. Učivo spadá do tematického celku Funkcie, úlohy majú motivačno – aplikačný charakter. Prvé štyri úlohy vedú k hľadaniu lokálneho maxima kvadratickej funkcie. Úlohy 1, 2 a 3 na seba kontextovo nadväzujú, úloha 4 je nezávislá. Prvá úloha má typické riešenie, hľadané celočíselné riešenie odpovedá vrcholu paraboly. Riešenie ostatných úloh sa vyznačuje nejakou osobitosťou, rozvíja u žiakov kritické a hodnotiace myslenie, zmysel pre kauzalitu a zohľadňovanie súvislostí. Úlohy 5 a 6 sú prevzaté z učebnice Matematika I s ekonomickými aplikáciami (Šoltés, Hudec, 2007), obe vedú k hľadaniu minima nepolynomickej funkcie.

Úlohy majú rôznorodé možnosti uplatnenia vo vzdelávacom procese (v sérii alebo samostatne zadané):

- ako problémové motivačné úlohy pri vyučovaní vlastností funkcií,
- ako problémové úlohy s propedeutickým efektom pred zavedením pojmu kvadratická závislosť,
- ako aplikačné a fixačné úlohy pri vyučovaní elementárnych funkcií.

Úloha 1

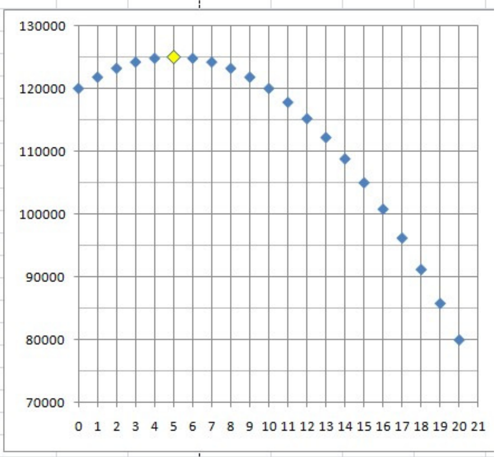
Cestovná agentúra ponúka do mesačného prenájmu turistické GPS navigácie v cene 60 € za kus a pri tejto cene zapožičia priemerne 3000 kusov mesačne. Každé zvýšenie ceny o 2 € prinesie zníženie počtu prenajatých navigácií o 100 kusov mesačne v priemere. Aký maximálny mesačný zisk môže mať agentúra zo zapožičiavania navigácií a pri akej cene ho dosiahne, ak jej mesačné náklady na údržbu jedného prístroja, vrátane amortizácie, sú 20 €?

Úlohu riešia žiaci samostatne, použitie dostupných IKT pomôcok neobmedzujeme. Najbežnejšie žiacke riešenie spočíva v opakovanom výpočte zisku agentúry v závislosti od počtu cenových navýšení, s cieľom nájsť maximálny zisk a cenu, pri ktorej ho agentúra dosiahne. Vhodným nástrojom na výpočet jednotlivých hodnôt zisku je tabuľkový procesor, ako vidno v ukážke obrazovky (obr. 9). Daná úloha má jedno riešenie: maximálny zisk *125 000 €* agentúra dosiahne pri jednotkovej cene *70 €* za prenájom.

Pre zvýšenie názornosti doplníme žiacke riešenie o vizualizáciu číselných hodnôt formou grafu. V uvedenej ukážke je použitý graf XY závislosť, vhodný je aj čiarový graf, pričom dbáme na jeho nespojitosť. Opísaný prístup k riešeniu u žiakov formuje diskrétne vnímanie závislosti dvoch veličín a okrem iného propedeuticky pripravuje žiakov na numerické iteračné metódy riešenia problémov.

Od žiakov požadujeme zdôvodnenie, že ani pri vyšších cenách za prenájom, ako obsahuje tabuľka, už agentúra nedosiahne vyšší zisk. Vedieme ich k vyjadreniu predpisu funkcie zisku. Opierame sa o vzorce v tabuľke a dostávame $f_1 : y = (60 + 2x - 20)(3000 - 100x)$, po zjednodušení a úprave na kanonický tvar máme $f_1 : y = -200\,(x - 5)^2 + 125000$. Riešenie uzavrieme tým, že ide o kvadratickú funkciu definovanú na podmnožine prirodzených čísel. Jej kvadratický koeficient je záporný, čomu odpovedá priebeh s maximom vo vrchole so súradnicami $[5; 125000]$.

	A	B	C	D	E
1	cena za prenájom	náklady agentúry	zisk z prenájmu jednej navigácie	počet prenajatých navigácií	celkový zisk z prenájmu
2	60	20	40	3000	120000
3	62	20	42	2900	121800
4	64	20	44	2800	123200
5	66	20	46	2700	124200
6	68	20	48	2600	124800
7	70	20	50	2500	125000
8	72	20	52	2400	124800
9	74	20	54	2300	124200
10	76	20	56	2200	123200
11	78	20	58	2100	121800
12	80	20	60	2000	120000
13	82	20	62	1900	117800
14	84	20	64	1800	115200
15	86	20	66	1700	112200
16	88	20	68	1600	108800
17	90	20	70	1500	105000
18	92	20	72	1400	100800
19	94	20	74	1300	96200
20	96	20	76	1200	91200
21	98	20	78	1100	85800
22	100	20	80	1000	80000



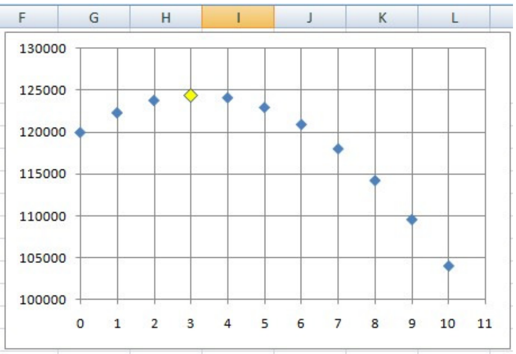
Obrázok 9 Grafické riešenie úlohy 1

Úloha 2

Z prieskumu vyplynula tiež možnosť znížiť cenu za prenájom prístroja, pričom každé zníženie o dve eurá prinesie zvýšenie odberu o 220 kusov navigácií. Pri akej cene bude zisk z prenájmu maximálny? Je možné, že agentúra získa viac znížením ako zvýšením ceny za prenájom?

Využijeme kópiu tabuľky z riešenia predošlej úlohy. Analogicky nájdeme maximálnu hodnotu zisku *124 440 €*, čo je menej ako *125 000 €* (obr. 10). Znamená to, že znižovaním ceny s uvažovanou odozvou na dopyte agentúra nezíska viac. Na trhu s inými podmienkami by však vo všeobecnosti maximum druhej funkcie mohlo prevýšiť maximum funkcie f_1. Od žiakov požadujeme príklad takej závislosti (stačí zväčšiť hodnotu, o ktorú sa zvyšuje dopyt po prístrojoch, na *300*).

	A	B	C	D	E
1	cena za prenájom	náklady agentúry	zisk z prenájmu jednej navigácie	počet prenajatých navigácií	celkový zisk z prenájmu
2	60	20	40	3000	120000
3	58	20	38	3220	122360
4	56	20	36	3440	123840
5	54	20	34	3660	124440
6	52	20	32	3880	124160
7	50	20	30	4100	123000
8	48	20	28	4320	120960
9	46	20	26	4540	118040
10	44	20	24	4760	114240
11	42	20	22	4980	109560
12	40	20	20	5200	104000



Obr. 10 Grafické riešenie úlohy 2

V tabuľkovej reprezentácii funkcie f_2 vidíme, že postupnosť hodnôt zisku „nie je súmerná podľa maximálnej hodnoty“, na rozdiel od funkcie f_1. Potvrdzuje to aj graf funkcie f_2, ktorý nie osovo súmerný. To vedie k sérii otázok, na ktoré žiaci hľadajú odpoveď v dvojiciach, resp. väčších skupinách, ak to organizácia vyučovania dovoľuje:

- Akým predpisom je funkcia určená?

- O aký typ elementárnej závislosti sa jedná?
- Nadobúda maximum v bode „3“?

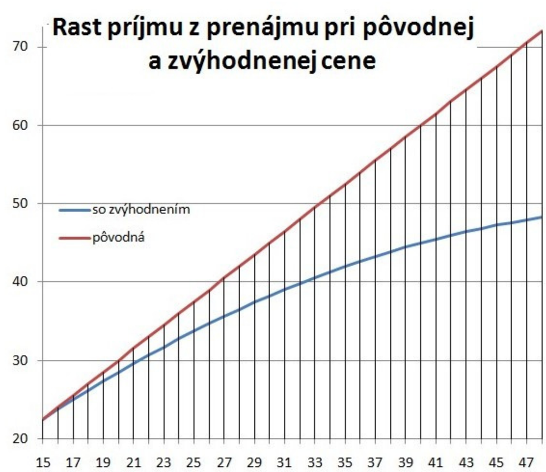
Zdanlivý nesúlad spočíva v tom, že bod so súradnicami $[3; 124440]$ nie je vrcholom paraboly, ktorá je grafom spojitej funkcie f_2. Vyplýva to z predpisu funkcie $f_2 : y = (60 - 2x - 20)(3000 + 220x)$, po úprave $f_2 : y = -40\,(x - \frac{35}{11})^2 + \frac{1369000}{11}$. Z kontextu úlohy je zrejmé, že funkcia f_2 je definovaná len pre celočíselné hodnoty, jej grafom je množina izolovaných bodov paraboly. Z vlastností kvadratickej funkcie ďalej vyplýva, že f_2 nadobúda v bode „*3*“ maximum, lebo je to bod najbližší k vrcholu paraboly (vrchol má súradnice $x = \frac{35}{11}$, $y = \frac{1369000}{11}$).

Na záver upozorníme na fakt, že aj riešenie tejto úlohy je jednoznačné, ale optimálna hodnota neodpovedá vrcholu paraboly. Otvoríme diskusiu k možnému počtu optimálnych riešení pri diskrétnej kvadratickej závislosti. Diskusiu riadime, prípadne smerujeme k objaveniu situácie s dvomi optimálnymi riešeniami x_1, x_2 (prípad, keď os paraboly rozpoľuje interval s krajnými bodmi x_1, x_2).

V ďalšej úlohe skúmame spojitú závislosť. Odporúčame formu hrania rolí. Učiteľ vystupuje v pozícii marketingového manažéra, ktorý predstavuje projekt cenového zvýhodnenia pre zákazníkov. Ďalšími aktérmi sú:

- pracovníci výpočtového oddelenia, ktorých úlohou je pripraviť nástroj na výpočet pôvodnej a zvýhodnenej ceny a pružne ho prispôsobovať návrhom manažéra,
- členovia predstavenstva, ktorí posudzujú, prípadne oponujú vhodnosť návrhu s cieľom maximalizovať zisk,
- zákazníci, ktorých cieľom je minimalizovať cenu za zapožičanie.

Úloha 3



Agentúra zapožičiava turistické GPS navigácie aj na kratšie časové úseky. Pôvodne bola výsledná suma priamoúmerná dobe zapožičania pri stanovenej hodinovej sadzbe (prístroje majú zabudovaný časovač s presnosťou na stotiny sekundy). Rozmáhajúca sa konkurencia však agentúre spôsobila odliv zákazníkov, preto marketingové oddelenie navrhuje program cenového zvýhodnenia, podľa ktorého hodinová cena klesne z 1,50 € o toľko percent, o aký čas prekročí doba zapožičania 15 hodín. Manažér prezentoval riešenie predstavenstvu, graficky demonštroval, že hoci príjem agentúry rastie pomalšie ako v pôvodnom lineárnom modeli, s rastúcou dobou zapožičania má neklesajúci trend. Prijali by ste na mieste majiteľa navrhovanú úpravu?

Problém je otvorený novým otázkam, navrhovaným úpravám, porovnaniam z rôznych pohľadov. Ponúkame zopár záchytných bodov, ktoré považujeme za kľúčové pri analýze problému.

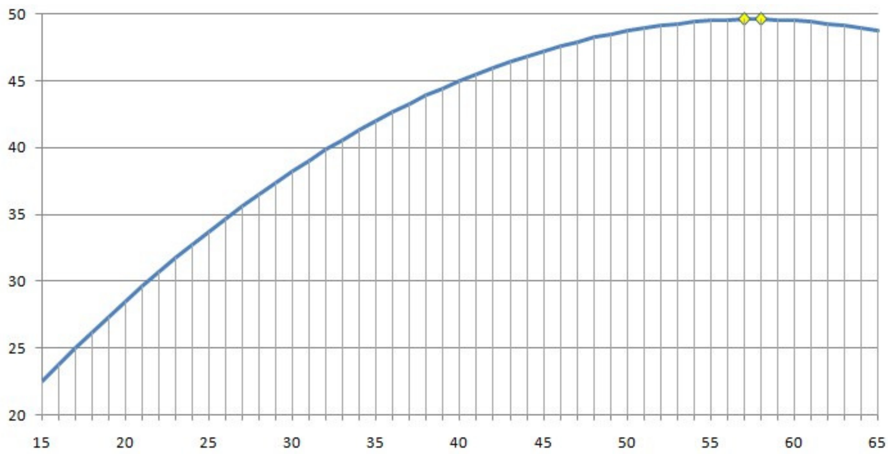
- Manažér argumentuje potrebu znižovania ceny odlivom zákazníkov (napr. z aktuálneho mesačného počtu *2000* na *1750*), odvoláva sa na priemernú dobu zapožičania (napr. *15* až *30* hodín), pri ktorej pokles zisku nie je taký markantný (vychádza z priemerov).

doba zapožičania	pôvodná cena			zvýhodnená cena		
	priemerný príjem z jednej výpožičky	počet zákazníkov	mesačný príjem	priemerný príjem z jednej výpožičky	počet zákazníkov	mesačný príjem
15 až 30 hodín	33,75	1750	59062,5	30,9	2000	61800

	A	B	C	D	E
1	doba prenájmu nad 15 hodín	doba prenájmu	platba za hodinu	celkový zisk z prenájmu pri cenovom zvýhodnení	celkový zisk z prenájmu pri pôvodnom cenovom systéme
2	0	15	1,5	22,5	22,5
3	1	16	1,485	23,76	24
4	2	17	1,47	24,99	25,5
5	3	18	1,455	26,19	27
6	4	19	1,44	27,36	28,5
39	37	52	0,945	49,14	78
40	38	53	0,93	49,29	79,5
41	39	54	0,915	49,41	81
42	40	55	0,9	49,5	82,5
43	41	56	0,885	49,56	84
44	42	57	0,87	49,59	85,5
45	43	58	0,855	49,59	87
46	44	59	0,84	49,56	88,5
47	45	60	0,825	49,5	90
48	46	61	0,81	49,41	91,5
49	47	62	0,795	49,29	93
50	48	63	0,78	49,14	94,5
51	49	64	0,765	48,96	96
52	50	65	0,75	48,75	97,5
53	51	66	0,735	48,51	99

Obr. 11 Porovnanie zisku pri zvýhodnenej a pôvodnej cene

- Pracovníci výpočtového oddelenia vyjadria predpisy funkcií príjmu agentúry zo zapožičania jedného prístroja v závislosti od doby zapožičania, pri zvýhodnenej cene $f_1 : y = 1{,}5 \cdot x \cdot \left(1 - \dfrac{x-15}{100}\right)$, pri pôvodnej cene $f_2 : y = 1{,}5 \cdot x$, znázornia ich priebeh graficky.
- Ktokoľvek zo zúčastnených upozorní na nutnosť horného obmedzenia doby zapožičania na *58* hodín, aby bola dodržaná podmienka neklesania hodnôt príjmu pri rastúcej dobe zapožičania.



Obr. 12 Demonštrácia nutnosti horného obmedzenia doby zapožičania v záujme nestratovosti

Zaradením nasledujúcej úlohy chceme poukázať na nutnosť kriticky myslieť a vnímať súvislosti pri riešení úloh tohto typu a na často nepostačujúci „algoritmický“ prístup žiakov k riešeniu.

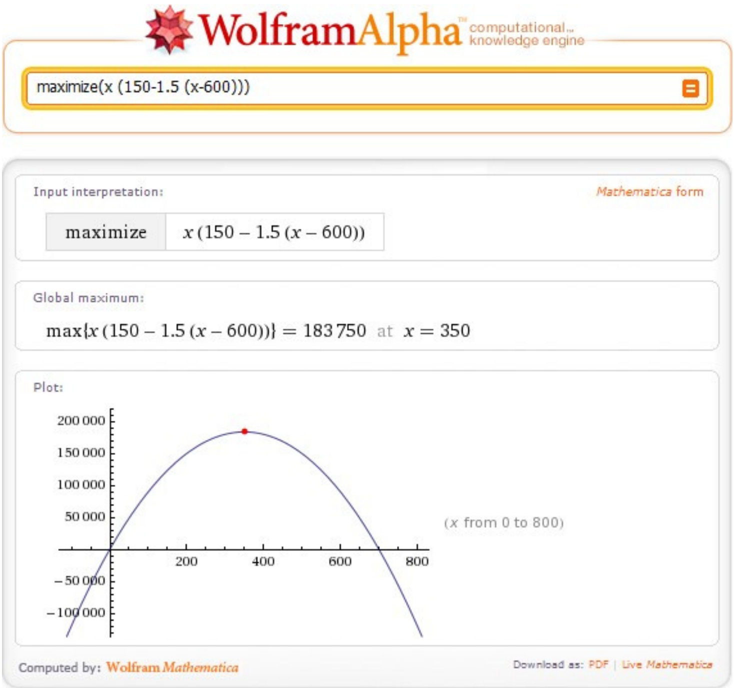
Úloha 4

Výletná loď má kapacitu 1200 miest. Cena za jedno miesto na lodi je 150 €. Aby majiteľ prilákal viac záujemcov, vyhlásil pre najbližšiu plavbu takúto akciu: ak počet výletníkov prekročí 600, každému z nich vráti toľkokrát 1,50 €, o koľko prevýši počet výletníkov číslo 600. Najviac koľko eur môže majiteľ lode získať za akciovú plavbu?

Zostavíme matematický model situácie, tak ako v predošlých úlohách, v ktorom maximalizáciu zisku z plavby prevedieme na problém určenia maxima funkcie $f : y = x \cdot (150 - 1{,}5 \cdot (x - 600))$, kde nezávislá premenná *x* vyjadruje počet účastníkov plavby. Na nájdenie maxima použijeme on-line aplikáciu dostupnú na www.wolframalpha.com. Zadáme požiadavku na určenie maximálnej hodnoty v tvare

Maximize (x(150-1.5(x-600))).

Z odpovede (obr. 13) vidíme, že funkcia nadobúda maximum vo vrchole paraboly so súradnicami $[350; 183750]$.



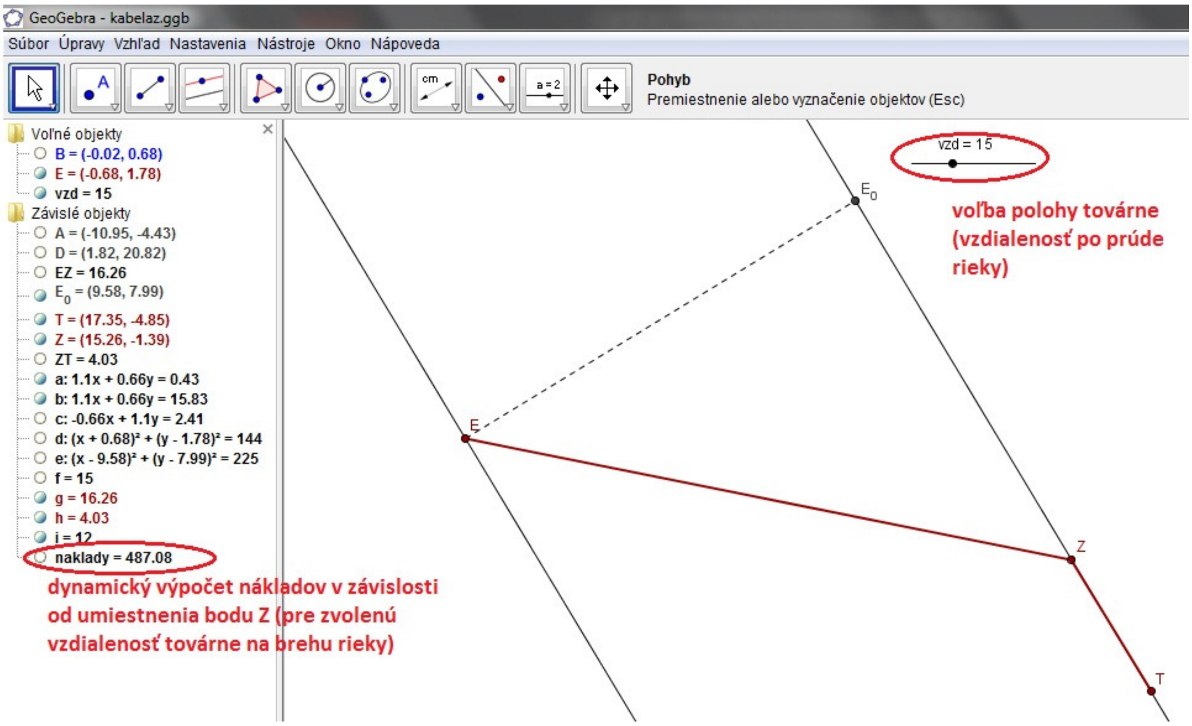
Obr. 13 Softvérová odpoveď na požiadavku maximalizácie

Hodnotu *183750 €* žiaci často mylne považujú za hľadaný maximálny možný príjem majiteľa z realizácie výletnej plavby pre *350* účastníkov. Ľahko overíme, že pri počte *350* účastníkov podnikateľ získa iba 52500*€*. Zo zadania úlohy vyplýva obmedzenie definičného oboru funkcie *f* na hodnoty väčšie ako *600*, čo hodnota *350* nespĺňa. Pre argumenty menšie alebo rovné 600 zisk rastie priamoúmerne počtu výletníkov a najväčšia hodnota odpovedá najväčšiemu argumentu 600. Až pre hodnoty väčšie ako 600 na výpočet využijeme funkciu *f*. Tá je na intervale $(600;\infty)$ klesajúca. Z toho vyplýva, že majiteľ lode získa najvyšší príjem, keď na palube lode bude práve *600* účastníkov plavby. Sformulujeme odpoveď na otázku položenú v úlohe: majiteľ môže z plavby získať najviac *90000 €.*

Úloha 5

Z elektrárne na jednej strane rieky širokej 1200 metrov sa má viesť kábel ku továrni na druhej strane rieky, 1500 metrov dole prúdom. Náklady na vedenie kábla pod vodou sú 25 dolárov za jeden meter, na vedenie v zemi sú 20 dolárov za jeden meter. Akú trasu zvoliť pre kábel, aby náklady boli minimálne? Zmenila by sa optimálna trasa vedenia kábla, keby továreň bola vzdialená 2000 metrov dole prúdom?

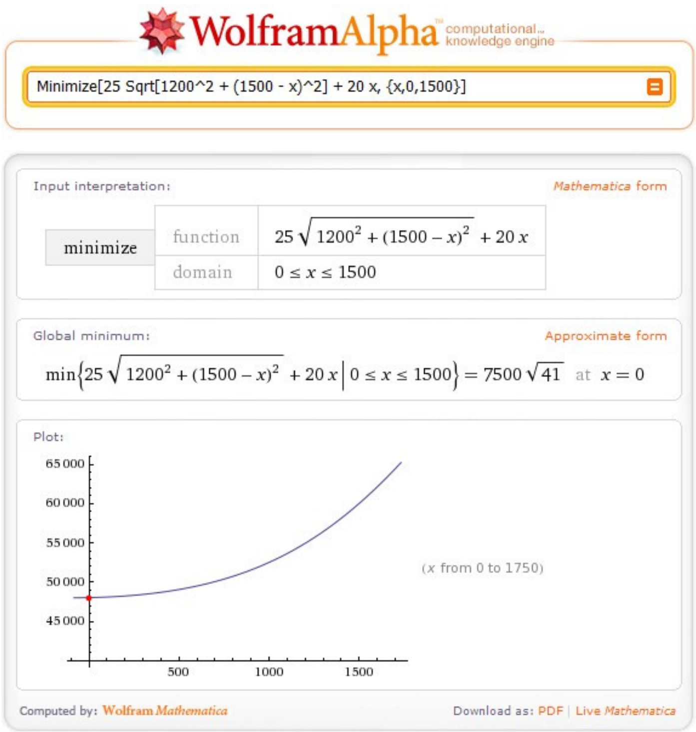
Pri riešení tejto úlohy vyjadreniu predpisu funkcie nákladov prirodzene predchádza zostavenie geometrického modelu. Je na zvážení učiteľa, či žiakom dá k dispozícii hotový model v podobe výkresu dynamickej geometrie. Ukážka na nasledujúcom obrázku je z prostredia DGS GeoGebra (obr. 14).



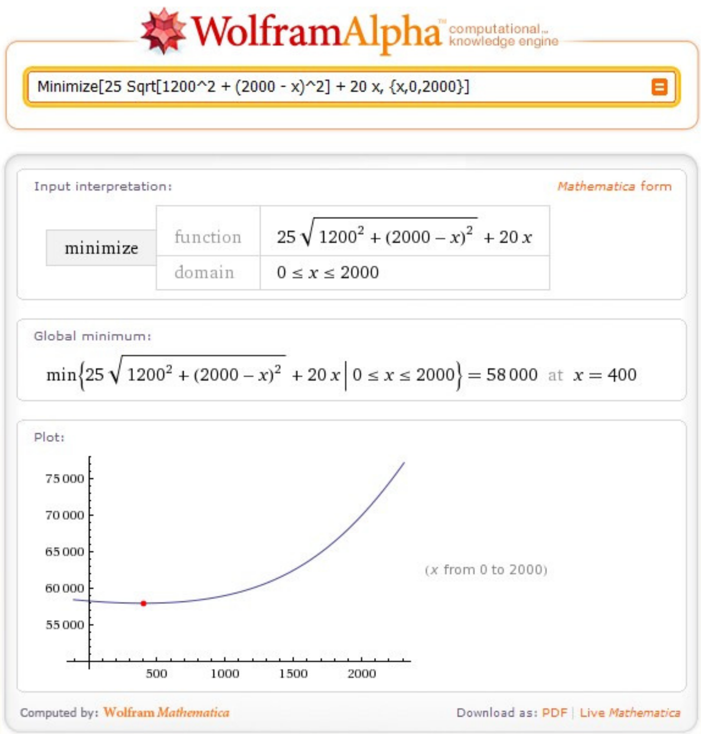
Obr. 14 Ukážka riešenia úlohy 5 v DGS GeoGebra

V modelovej situácii body *E*, *T* na rovnobežkách predstavujú elektráreň a továreň na náprotivných brehoch rieky. Bod E_0 je kolmým priemetom bodu *E* na príslušnú priamku. Všetky vzdialenosti v modeli sú stokrát menšie ako v zadaní úlohy. Vzdialenosť továrne od elektrárne po prúde rieky nastavujeme posuvníkom v pravej hornej časti výkresu. Pohyblivý bod *Z* je bodom zlomu na trase vedenia kabeláže. Jeho umiestneniu odpovedá hodnota premennej *naklady*, prostredníctvom ktorej sú dynamicky vyčísľované celkové náklady na vedenie kabeláže.

Tento model žiakom pomôže pri prvotnom skúmaní závislosti výšky nákladov od voľby bodu zlomu *Z*. Pri práci s ním by mali objaviť optimálne riešenie pre obe dané vzdialenosti továrne od elektrárne. Ťažiskom riešenia úlohy je zdôvodnenie objavených záverov. Žiakov vedieme k zostaveniu algebrického modelu úlohy, k vyjadreniu predpisu funkcie nákladov $n_1 : y = \sqrt{1200^2 + (1500 - x)^2} \cdot 25 + 20x$. Z výrazu vidíme využitie Pytagorovej vety pri výpočte dĺžok jednotlivých úsekov trasy. V poslednej fáze riešenia opäť využijeme webový nástroj www.wolframalpha.com na grafické znázornenie priebehu a výpočet minimálnej hodnoty funkcie n_1, pre prípustné hodnoty argumentu (obr. 15). Pre vzdialenosť *1500* metrov po prúde rieky je z hľadiska nákladov najvýhodnejšie viesť celý kábel pod vodou priamo od elektrárne k továrni. Analogicky vyjadríme predpis funkcie nákladov pre vzdialenosť *2000* metrov $n_2 : y = \sqrt{1200^2 + (2000 - x)^2} \cdot 25 + 20x$ a určíme minimum (obr. 16).



Obr. 15 Ukážka on-line výpočtu



Obr. 16 Ukážka on-line výpočtu

Pre úplnosť uvádzame riešenie aj pre druhú danú polohu elektrárne a továrne: náklady budú najnižšie, ak kábel bude vedený šikmo pod vodou do vzdialenosti *400* metrov hore prúdom od továrne a ďalších *400* metrov bude vedených v zemi.

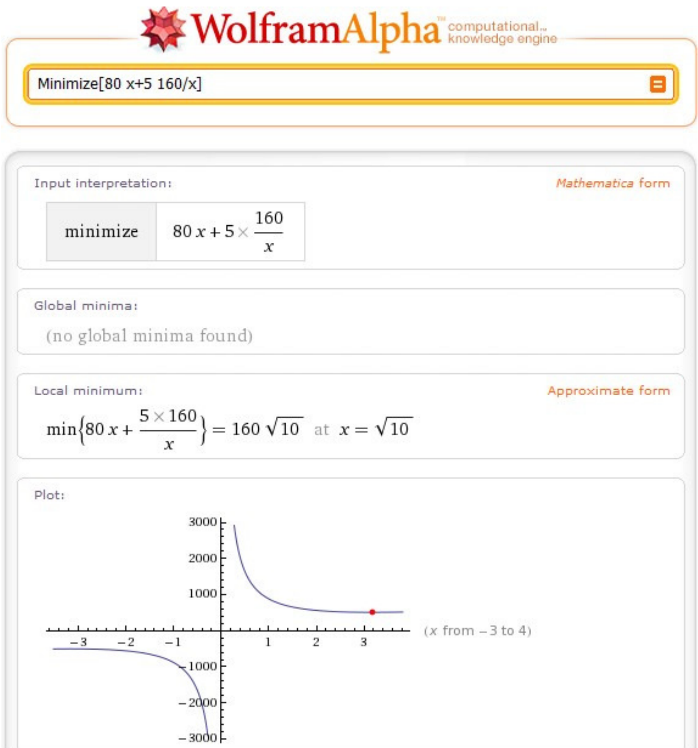
Úloha 6

Všetky výrobné stroje v prevádzke podniku pracujú rýchlosťou 50 kusov za hodinu. Nastavovacie náklady sú 80 dolárov pre každý stroj a celkové operačné náklady sú 5 dolárov za hodinu nezávisle od počtu strojov. Koľko strojov sa má použiť, aby pri produkcii 8000 kusov boli náklady minimálne?

Princíp riešenia úlohy 6 je rovnaký ako u predošlých úloh. Zo skúseností však upozorňujeme na problémové miesto v žiackych riešeniach: vyjadrenie počtu hodín prevádzky potrebnej na výrobu *8000* kusov výrobkov. Zo zadania je zrejmé, že vo funkcii nákladov bude nezávislá premenná x vyjadrovať počet strojov. Doba prevádzky je určená podielom počtu vyrobených kusov a hodinovou produkciou na x strojoch, teda $\frac{8000}{50x}$. Na objavenie tohto vzťahu je vhodná tabuľka, v ktorej žiaci experimentujú s konkrétnymi hodnotami počtu strojov a zovšeobecnením odvodia hľadaný vzťah.

Funkcia celkových nákladov definovaná len pre celočíselné argumenty je vyjadrená predpisom $n: y = 80x + \frac{8000}{50x} \cdot 5$. Minimum dosiahne pre $x = \sqrt{10}$, čomu najbližšia celočíselná hodnota počtu strojov je *3* (obr. 17).

V súvislosti s použitím „náhradnej“ celočíselnej hodnoty minima v rámci zhrnutia diskutujeme so žiakmi aj otázky počtu hodín prevádzky, počtu vyprodukovaných výrobkov, platnosť riešenia v situácii, keď stroje pracujú v celohodinových intervaloch.



Obr. 17 Ukážka on-line výpočtu

ZÁVER

Z našich doterajších skúseností z vyučovania matematiky na strednej škole vyplýva, že prvým predpokladom pre aktívne včlenenie žiaka do procesu vzdelávania je zaujať ho. Z tohto pohľadu je vyučovanie, ktoré sa obsahovo týka funkcií, vhodné na uplatnenie metód stimulujúcich tvorivú činnosť žiakov. A to najmä vďaka rôznorodosti oblastí, v ktorých funkcie majú svoje uplatnenie, čo poskytuje učiteľovi priestor na motiváciu žiakov s rôznymi záujmami. Úlohy, ktoré sú podkladom pre navrhnutú metodiku sú situované do oblasti obchodu a voľno-časových aktivít, dve prevzaté úlohy sú z prostredia priemyselnej výrobnej sféry.

Preukázateľný vplyv na výkon žiaka majú aj dostupné pracovné nástroje. Máme za to, že vyučovanie bez podpory IKT prostriedkov a informačných zdrojov, ktoré sú prirodzenou súčasťou mimoškolského života žiaka, by bolo v rozpore s aktivizačnými snahami učiteľa. V súlade s tým metodika opisuje použitie IKT nástrojov, ktoré považujeme za efektívne pre vyriešenie daných úloh a dosiahnutie vymedzených vzdelávacích cieľov. Uplatnenie systému úloh vo vyučovaní však nie je podmienené ich použitím. Navrhovaná metodika necháva učiteľovi aj žiakom priestor na výber alternatívnych podporných prostriedkov.

V neposlednom rade zdôrazňujeme, že získanie pozornosti žiaka, jeho motivácia a záujem sú len prvým krokom na ceste k aktívnemu učeniu sa podľa navrhnutej metodiky. Úlohou učiteľa je ďalej ich pri riešení úloh využiť k objavovaniu súvislostí, k snahe o zovšeobecňovanie a logické zdôvodňovanie objavených vzťahov a rozvíjať tak funkčné myslenie žiaka.

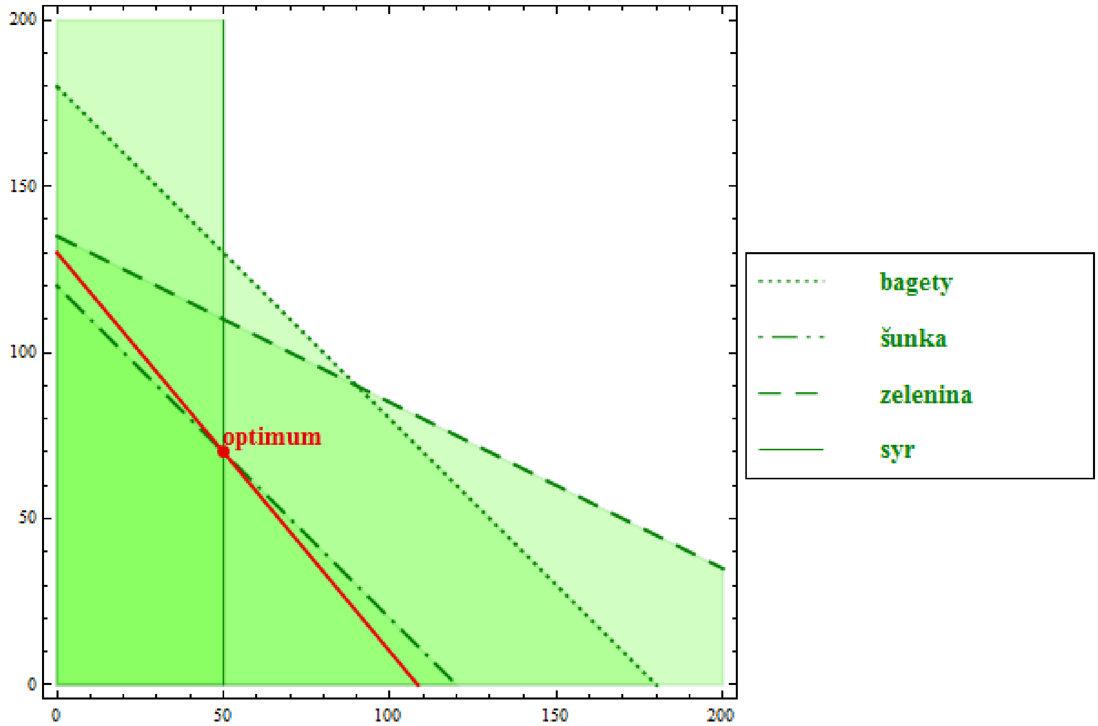
ZOZNAM BIBLIOGRAFICKÝCH ZDROJOV

1. Haláková, Z., Kubiatko, M. Tvorivosť ako pozitívny atribút osobnosti budúceho učiteľa prírodovedných predmetov [online]. In Paidagogas, roč. 2007, č. 3 [cit. 8. októbra 2012]. Dostupné na : http://www.paidagogos.net. ISSN 1213-3809
2. Hejný, M., Novotná J., Stehlíková N. Dvacetpět kapitol z didaktiky matematiky. Praha : UK Pedagogická fakulta, 2004. ISBN 80-7290-189-3
3. Koršňáková, P., Kováčová, J., Heldová, D. Národná správa OECD PISA Sk 2009. Bratislava : NÚCEM, 2010. ISBN 978 - 80 - 970261 - 4 – 1
4. Koršňáková, P., Kováčová, J. Národná správa OECD PISA SK 2006. Bratislava : ŠPÚ, 2007. ISBN – 978-80-89225-37-8
5. Kubáček, Z. PISA SK 2003, Matematická gramotnosť. Bratislava : ŠPÚ, 2004. ISBN 80-85756-88-9
6. Šoltés, V., Hudec, O., Penjak, V. a kol.: Matematika I s ekonomickými aplikáciami, EkF TUKE, elfa s.r.o., 2007, Košice, ISBN 80-8073-843-3
7. Timková, D. Grafické riešenie úloh lineárneho programovania. Košice : PF UPJŠ, 2001. [cit. 20. októbra 2012]. Dostupné na : http://web.ics.upjs.sk/grulp/.
8. Timková, D. Analytická geometria verzus lineárna optimalizácia. In Matematika - Fyzika - Informatika, 2004/2005, no. 4, pp. 198–212, no. 5, pp. 268–273
9. Turek, I. Didaktika. 1. vyd. Bratislava : Iura edition, 2008. ISBN 978-80-8078-198-9
10. Vališová, A., Kasíková, H. Pedagogika pro učitele. 2. vyd. Praha : Grada, 2011. 456 s. ISBN 978-80-247-3357-9

Zdroje obrázkov a tabuliek: súkromný archív autora.

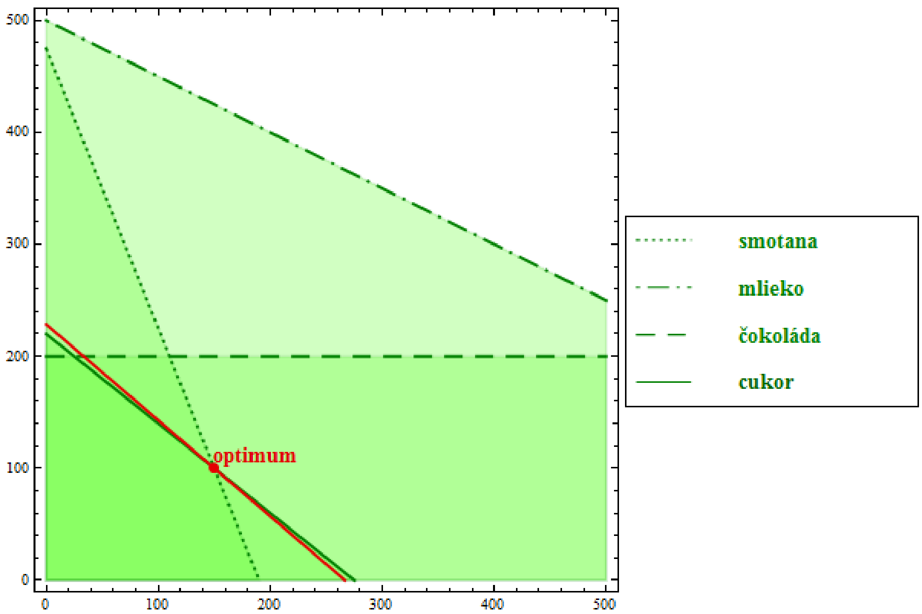
ZOZNAM PRÍLOH

Zadanie 1



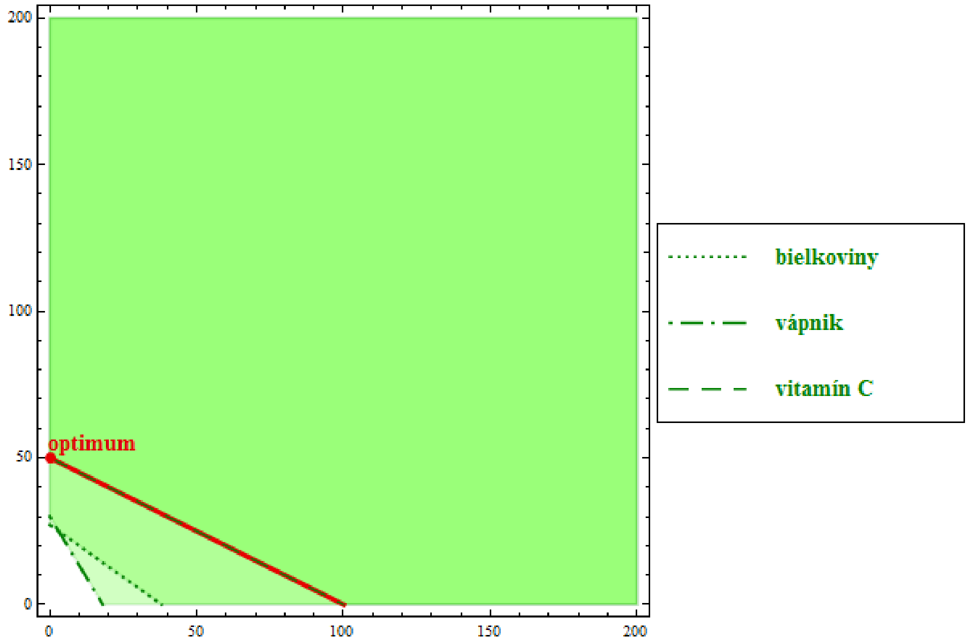
Optimálne riešenie: x = 50.00 ∧ y = 70.00, pričom účelová funkcia nadobúda hodnotu: 45.50.

Zadanie 2



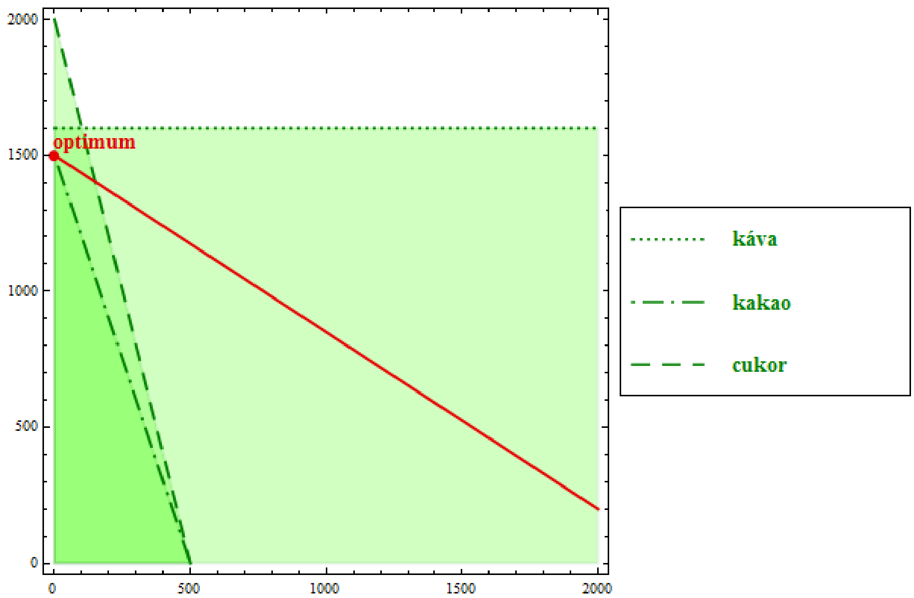
Optimálne riešenie: x = 150.00 ∧ y = 100.00, pričom účelová funkcia nadobúda hodnotu: 80.00.

Zadanie 3



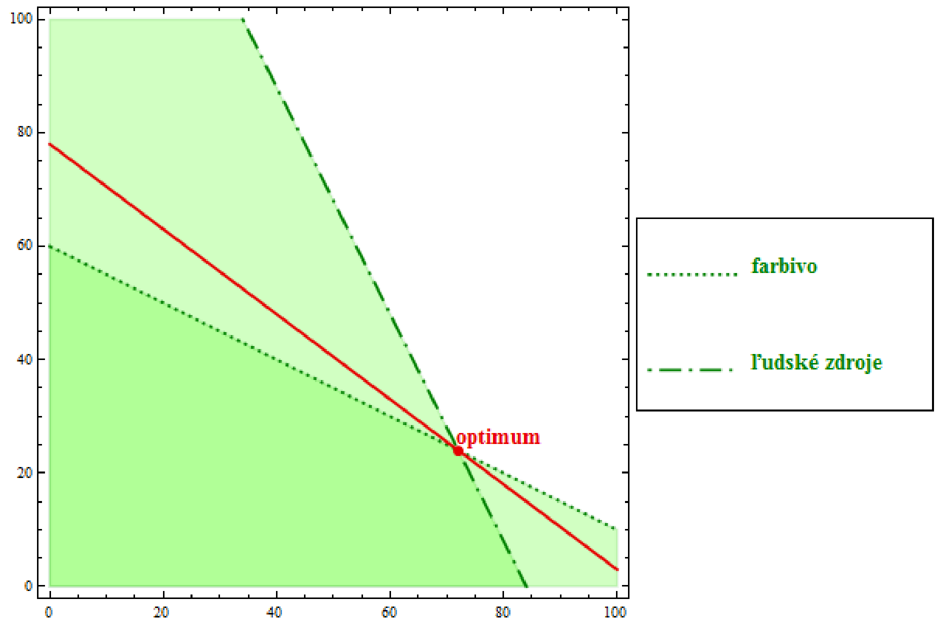
Optimálne riešenie: x = 0.00 ∧ y = 50.00, pričom účelová funkcia nadobúda hodnotu: 1.00.

Zadanie 4



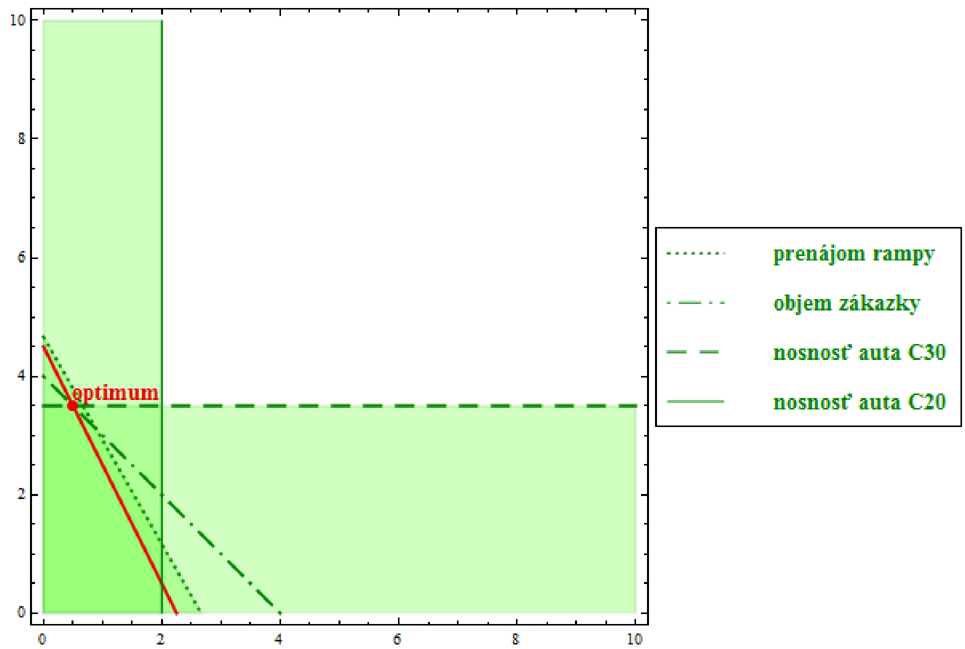
Optimálne riešenie: x = 0.00 ∧ y = 1500.00, pričom účelová funkcia nadobúda hodnotu: 3000.00.

Zadanie 5



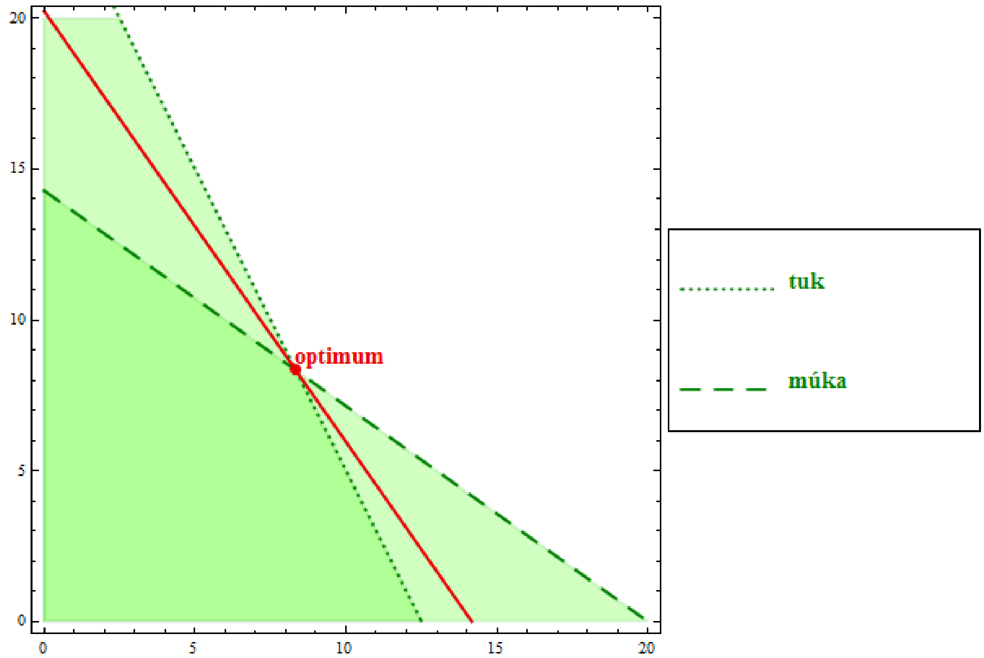
`Optimálne riešenie: x = 72.00   ∧   y = 24.00, pričom účelová funkcia nadobúda hodnotu: 156.00.`

Zadanie 6



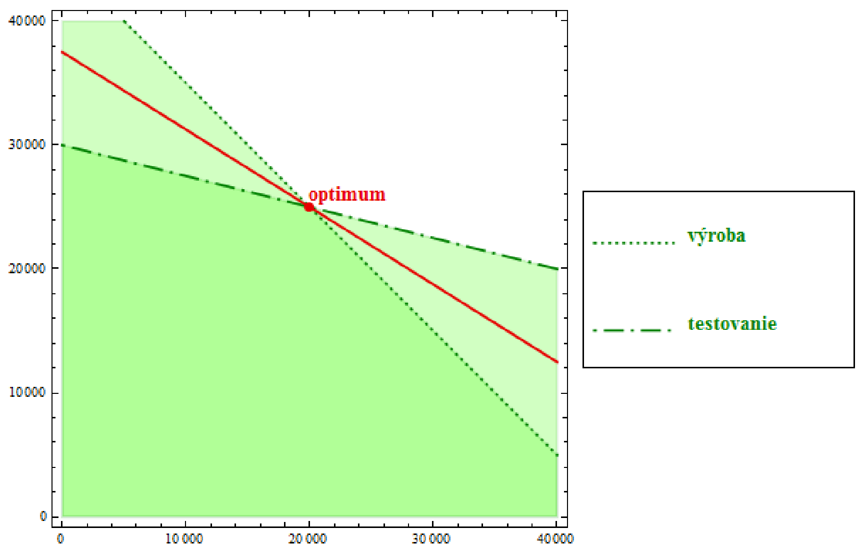
`Optimálne riešenie: x = 0.50   ∧   y = 3.50, pričom účelová funkcia nadobúda hodnotu: 27.50.`

Zadanie 7



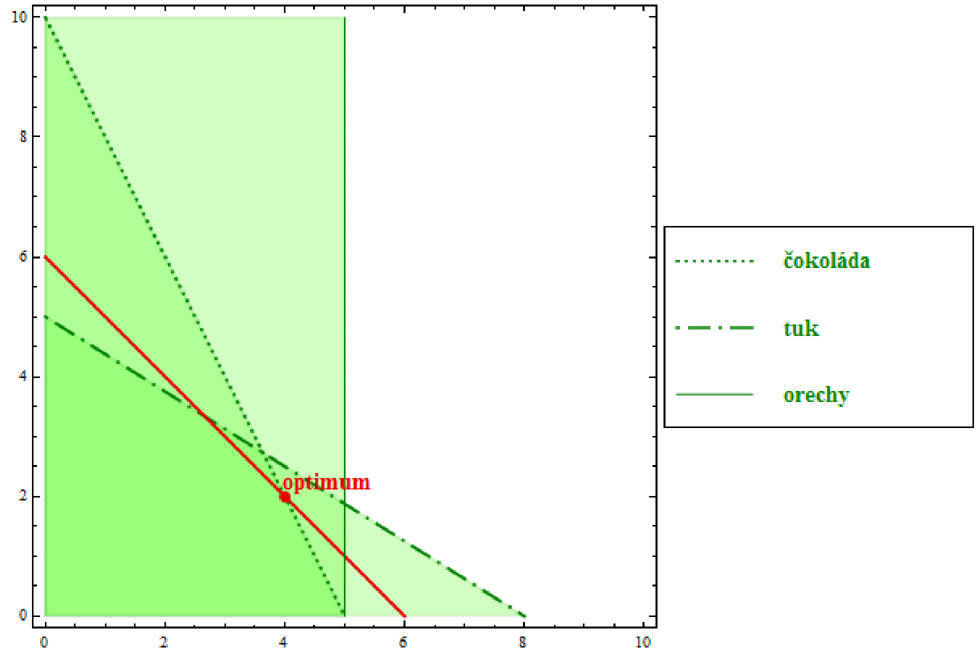
`Optimálne riešenie: x = 8.33 ∧ y = 8.33, pričom účelová funkcia nadobúda hodnotu: 70.83.`

Zadanie 8



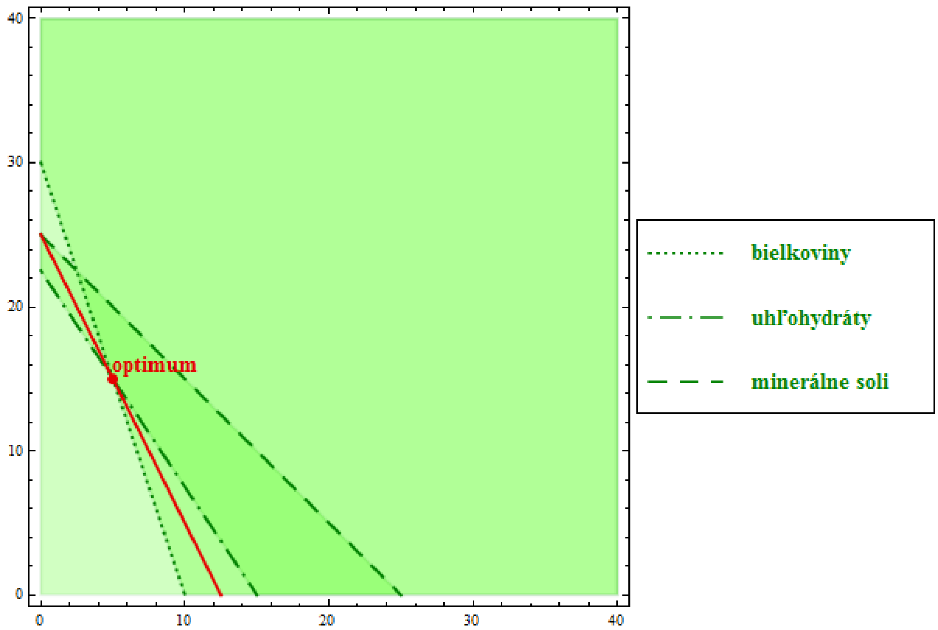
`Optimálne riešenie: x = 20000.00 ∧ y = 25000.00, pričom účelová funkcia nadobúda hodnotu: 300000.00.`

Zadanie 9



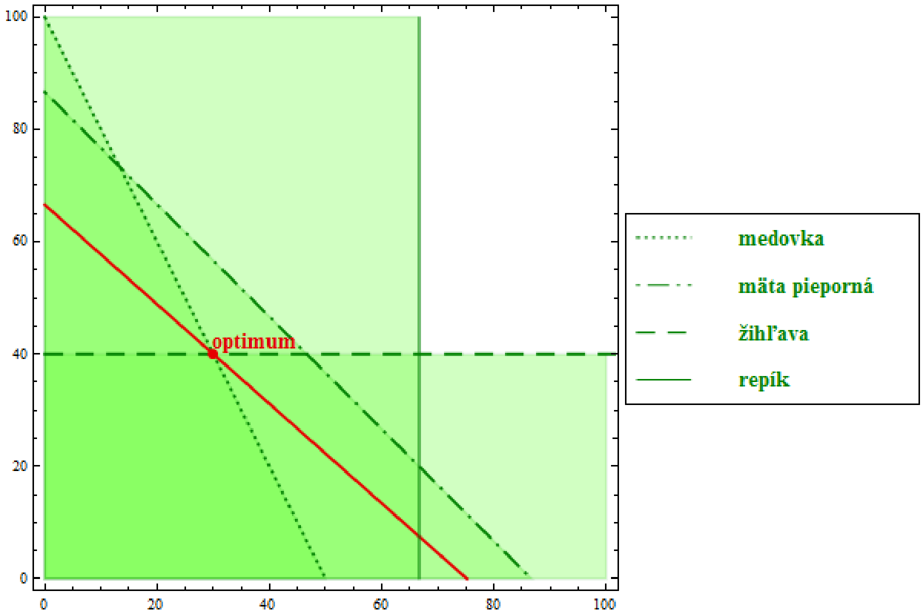
`Optimálne riešenie: x = 4.00   ∧   y = 2.00, pričom účelová funkcia nadobúda hodnotu: 6.00.`

Zadanie 10



`Optimálne riešenie: x = 5.00   ∧   y = 15.00, pričom účelová funkcia nadobúda hodnotu: 1250.00.`

Zadanie 11



Optimálne riešenie: x = 30.00 ∧ y = 40.00, pričom účelová funkcia nadobúda hodnotu: 2330.00.