Operačný program VZDELÁVANIE

mpc METODICKO-PEDAGOGICKÉ CENTRUM

PROFESIJNÝ A KARIÉROVÝ RAST pkrmpc METODICKO-PEDAGOGICKÉ CENTRUM

Európska únia
Európsky sociálny fond

Moderné vzdelávanie pre vedomostnú spoločnosť / Projekt je spolufinancovaný zo zdrojov EÚ

PaedDr. Jana Kontuľová

Derive vo vyučovaní matematiky

Osvedčená pedagogická skúsenosť edukačnej praxe

Prešov

2012

Vydavateľ:	Metodicko-pedagogické centrum, Ševčenkova 11, 850 01 Bratislava
Autor OPS/OSO:	PaedDr. Jana Kontuľová
Kontakt na autora:	Pracovisko: Gymnázium sv. J. Zlatoústeho, Lesná 28, 066 01 Humenné e-mailová adresa: pencakova@gmail.com
Názov OPS/OSO:	Derive vo vyučovaní matematiky
Rok vytvorenia OPS/OSO:	2012
Odborné stanovisko vypracoval:	RNDr. Danica Hanuliaková

Za obsah a pôvodnosť rukopisu zodpovedá autor. Text neprešiel jazykovou úpravou.

Táto osvedčená pedagogická skúsenosť edukačnej praxe/osvedčená skúsenosť odbornej praxe bola vytvorená z prostriedkov projektu Profesijný a kariérový rast pedagogických zamestnancov. Projekt je financovaný zo zdrojov Európskej únie.

Kľúčové slová

Derive, výraz, rovnica, nerovnica, definičný obor, obor hodnôt, polynóm, funkcia, postupnosť, kombinatorika, vektor, derivácia, integrál.

Anotácia

V dnešnej dobe sa veľmi často hovorí o zavádzaní informačno-komunikačných technológií a rôznych nových metód do vyučovania. Snažíme sa, aby učenie bolo zaujímavejšie, názornejšie. Táto práca má prezentovať využívanie nástroja Derive vo vyučovaní matematiky. Práca je rozdelená do jedenástich kapitol. Prvá kapitola popisuje prostredie nástroja Derive. Druhá až desiata kapitola majú názvy podľa tematických celkov, v ktorých možno Derive využívať. Posledná – jedenásta kapitola je zhrnutím kladov a nedostatkov vyučovania s Derive a jeho porovnaním s klasickou výukou. Derive možno používať pri práci s výrazmi rovnicami, funkciami, vektormi, maticami, deriváciami a integrálmi. Pomáha vizualizovať úlohy a ich riešenia.

OBSAH

ÚVOD

Matematický počítačový program Derive sa radí k skupine programov zvaných Počítačové algebraické systémy. S týmto programom sme začali pracovať na škole, najprv na záujmovom krúžku „Derive v matematike“, v školskom roku 2006/2007, po absolvovaní školenia v júli 2006 v školiacom stredisku CEDIV-M – Centrum ďalšieho vzdelávania učiteľov matematiky na Strojníckej fakulte Slovenskej technickej univerzite v Bratislave. Žiakom sa tento program zapáčil a na krúžok chodili veľmi radi. O dva roky neskôr sme už s týmto programom pracovali aj na hodinách matematiky, kedy sa trieda delila na polovice a vyučovaciu hodinu sme mali v triede, kde bolo desať počítačov. Z vlastnej skúsenosti môžeme povedať, že záujem o matematiku u žiakov vzrástol. Matematika sa stala zaujímavejšou a obľúbenejšou.

Pri zapojení sa do matematického projektu Comenius, sme zistili, že Derive je program, ktorý vo veľkej miere využívajú aj v zahraničí. Preto hlavnou témou práce, ktorá opisuje osvedčenú pedagogickú skúsenosť, je popísať využitie spomínaného matematického programu Derive vo vyučovaní matematiky. Ukážeme, ako možno program využívať v konkrétnych tematických celkoch.

Práca je rozdelená do jedenástich kapitol. Prvá kapitola popisuje prostredie Derive. Nasledujúcich deväť kapitol nesie názvy tematických celkov matematiky, v ktorých môžeme použiť Derive. Druhá kapitola Výrazy popisuje využitie programu pri zjednodušovaní a výpočtoch hodnôt výrazov. Tretia kapitola Rovnice, nerovnice, sústavy rovníc a nerovníc ukazuje možnosť použiť Derive pri riešení rovníc, nerovníc a ich sústav výpočtom i graficky. Štvrtá kapitola je venovaná polynómom. Piata, najväčšia kapitola, Funkcia jednej premennej, ukazuje využitie spomínaného programu hlavne pri kreslení grafov jednotlivých funkcií. Šiesta kapitola Vektorová a analytická geometria odhaľuje možnosť využitia Derive pri práci s vektormi a určovaní vzájomnej polohy priamok a rovín. Siedma kapitola Postupnosti reálnych čísel čitateľovi ukazuje, ako si zjednodušiť prácu pri riešení úloh tohto celku. Výpočty v kombinatorike nepatria k obľúbeným, hlavne z dôvodu zdĺhavých výpočtov hodnôt faktoriálu a kombinačného čísla. Preto v kapitole Kombinatorika ukazujeme ako si prácu zjednodušiť využitím Derive. V deviatej kapitole sa zaoberáme výpočtom derivácie funkcie a tiež priebehom funkcie. Predposledná kapitola - Integrály má čitateľovi objasniť použitie Derive na výpočet neurčitého a určitého integrálu. Kapitoly 2 – 10 obsahujú aj vzorové riešenia matematických úloh v programe Derive. Neriešené úlohy na precvičenie v práci neuvádzame, nakoľko v Derive riešime klasické úlohy a myslíme, že každý učiteľ má dostatočne rozsiahle banky úloh z jednotlivých celkov, ktoré žiakom bežne predkladá na riešenie či už na vyučovacej hodine alebo na domáce precvičenie.

Na každú podkapitolu sú určené na 2-3 vyučovacie hodiny, podľa rozsahu podkapitoly a vedomostnej úrovne žiakov. Na začiatku dvojhodinovky sme vždy zhrnuli učivo témy, ktorej sme sa venovali a následne sme so žiakmi prериešili uvedenú vzorovú úlohu na tabuľu a do zošita a nakoniec s využitím Derive. Potom pomocou Derive sme riešili ďalšie klasické úlohy z rozličných matematických zbierok. V poslednej – jedenástej kapitole sú zhnuté naše postrehy a postrehy žiakov na vyučovanie matematiky pomocou Derive.

Hlavným cieľom tejto práce je oboznámiť učiteľov matematiky s využitím programu Derive na hodinách matematiky resp. matematických krúžkoch. Ponechávame už na učiteľovi, kedy a v akom tematickom celku a v akom rozsahu sa rozhodne Derive využiť. Sekundárnym cieľom je budovať medzipredmetové vzťahy s informatikou, urobiť matematiku zaujímavejšou a pútavejšou.

1 PROSTREDIE DERIVE 6

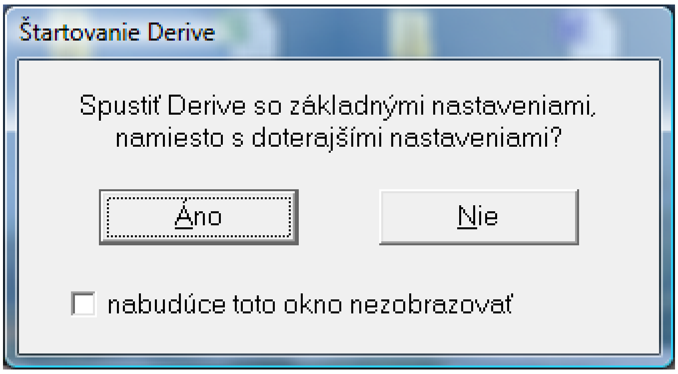
Matematický počítačový program Derive sa radí k skupine programov zvaných Počítačové algebraické systémy. Ak chceme s ním pracovať, musíme si ho najprv nainštalovať do počítača.

1.1 Spustenie programu Derive, opis prostredia

Po nainštalovaní Derive, sú nainštalované základné nastavenia. Program spustíme dvojklikom na ikonku Derive 6.

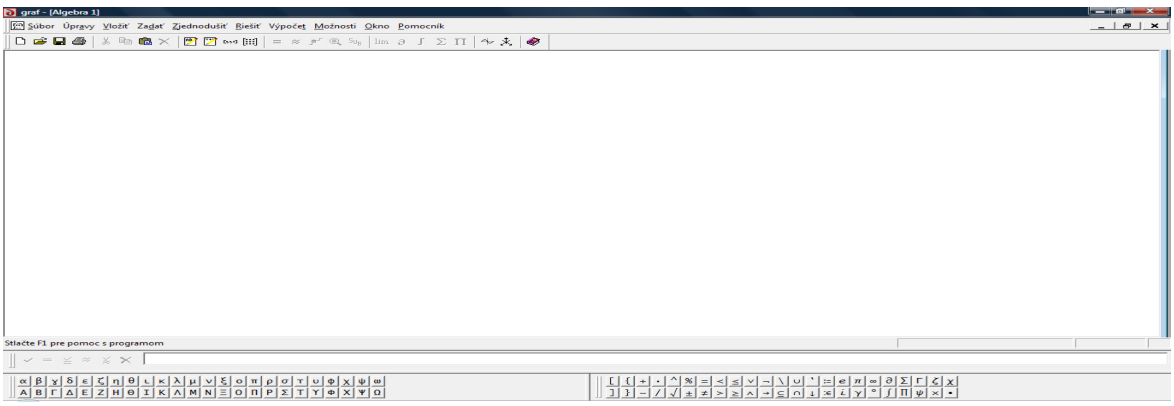
Obrázok 1 Ikona programu Derive 6

Následne sa nám objaví takéto okno:



Obrázok 2 Štartovanie Derive 6

Po odkliknutí „Áno“ sa objaví sa nasledujúca obrazovka:



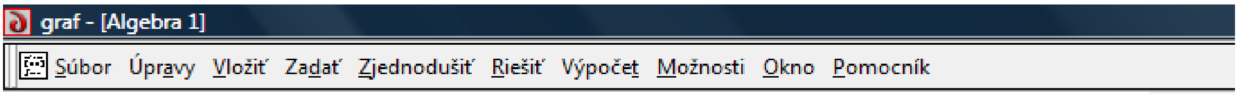
Obrázok 3 Obrazovka programu Derive 6

Ak by sme na pracovnej ploche nemali ikonku znázornenú na Obrázku 1, tak Derive nájdeme v ponuke **Štart > Programy**. Po pár sekundách sa zobrazí obrazovka programu Derive taká, ako na Obrázku 3.

Ako vidíme, obrazovka Derive pozostáva smerom nadol z týchto častí:

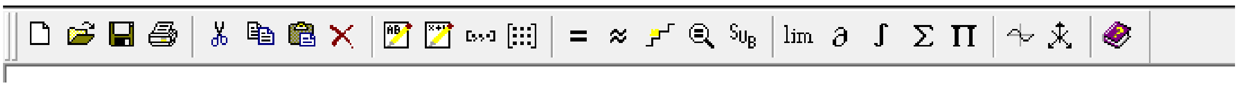
- nadpis okna
- ponuka
- panel nástrojov
- okno Algebra, ktoré nazývame aj prehľad (momentálne prázdne)
- stavový riadok
- príkazový riadok
- vľavo panel s gréckymi symbolmi a vpravo panel s matematickými symbolmi.

Po spustení je systém pripravený na zadanie vstupu cez príkazový riadok. Do tohto príkazového riadka už môžeme zadávať nejaké výrazy, funkcie, s ktorými chceme pracovať. Ešte skôr ako niečo zadáme do príkazového riadka, rozoberme si, čo nám ponúkajú jednotlivé časti obrazovky spomínaného programu. Hlavnú ponuku tvorí:



Obrázok 4 Ponuka programu Derive 6

V hlavnej ponuke sa nachádzajú všetky príkazy, ktoré daná aplikácia poskytuje. Podobne ako v rôznych iných aplikáciách aj tu máme jednotlivé panely nástrojov, ktoré nám poskytujú zjednodušený prístup k najčastejšie používaným príkazom. Príklad takéhoto panela nástrojov je znázornený na Obrázku 5.



Obrázok 5 Panel nástrojov

V tejto podkapitole nebudeme bližšie popisovať jednotlivé príkazy nachádzajúce sa v ponuke alebo na paneli nástrojov, ale popíšeme ich priamo v úlohách, koré sme riešili pomocou tohto programu so žiakmi.

1.2 Okná

V programe Derive možno pracovať v troch základných oknách:

- okno **Algebra** – slúži na zadávanie výrazov a vykonávanie výpočtov, vidíme ho na Obrázku 3;
- okno **Grafika 2D** – slúži na zobrazovanie grafov funkcie jednej premennej;
- okno **Grafika 3D** - slúži na zobrazovanie grafov funkcie dvoch premenných.

Navzájom sa medzi nimi môžeme pohybovať prepínaním ikon na paneli nástrojov (Obrázok 5, tretia sprava ikona – Grafika 2D, ikona druhá sprava – Grafika 3D) v základnom okne Algebry.

2 VÝRAZY

V tejto kapitole ukážeme, ako pracovať s výrazmi v Derive, čo všetko s nimi možno vykonať. Pri zadávaní výrazov treba dbať na správny „deriveovský“ zápis. Treba si dávať pozor na umiestnenie zátvoriek pri zápise do príkazového riadka. Potom je dobré použiť tlačidlo „zadať“ a následne skontrolovať, či je výraz správne zadaný.

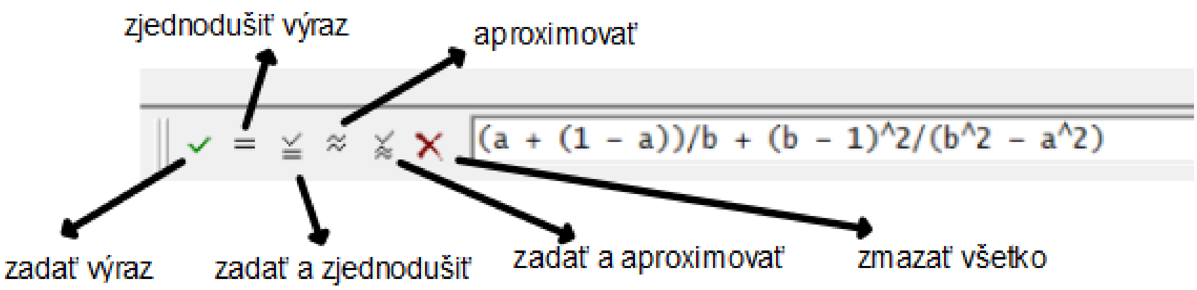
2.1 Zjednodušovanie výrazov

Zjednodušovanie výrazov za pomoci Derive si ukážeme na konkrétnej úlohe, ktorú môžeme predostrieť žiakom na riešenie a potom im ukázať ako si môžu správnosť riešenia skontrolovať pomocou Derive.

Úloha 2.1: Zjednodušte výraz $\frac{a+(1-a)}{b}+\frac{(b-1)^2}{b^2-a^2}$.

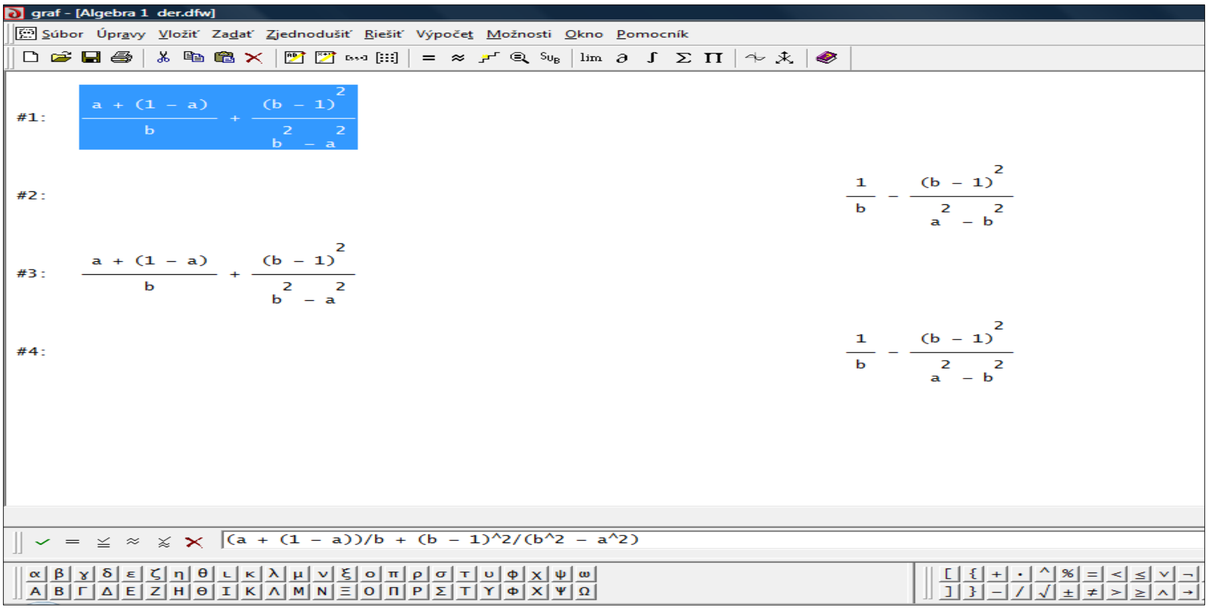
Riešenie:

Do príkazového riadka si tento výraz zapíšeme takto: (a+(1-a))/b+(b-1)^2/(b^2-a^2). Symbol „^“ si nájdeme na paneli s matematickými symbolmi. V príkazovom riadku vľavo sa nachádzajú tlačidlá vyobrazené a popísané na Obrázku 6.



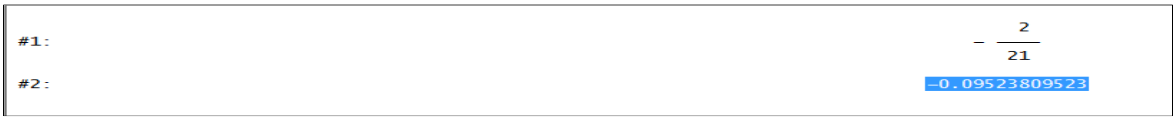
Obrázok 6 Tlačidlá v príkazovom riadku

Použitím prvého tlačidla len zadáme výraz. V okne Algebra bude zadaný výraz zapísaný tak, ako vidíme pod #1. Použitím druhého tlačidla „zjednodušiť výraz“ sa do pracovného okna zapíše len výsledok zjednodušenia bez zadania výrazu, tak ako to vidíme pod #2 v pracovnom okne Algebra programu DERIVE. Keď použijeme v poradí tretie tlačidlo „zadať a zjednodušiť“, v pracovnom okne nám vybehne #3 a #4. V tomto prípade pri použití tlačidla „aproximovať“ sa vykoná to isté, čo pri použití „zadať“ a analogicky „zadať a aproximovať“ je totožné so „zadať a zjednodušiť“.



Obrázok 7 Použitie tlačidiel príkazového riadka

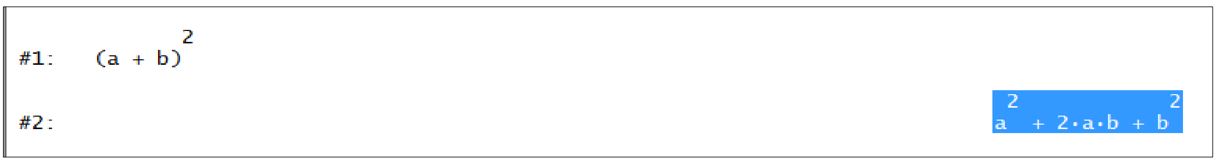
Odlišnosť by nastala, ak by sme zjednodušovali číselný výraz (napr. $\frac{1}{3}-\frac{2}{7}$). Ukazuje nám to Obrázok 8, kde riadok #1 ukazuje použitie tlačidla „zjednodušiť" a riadok #2 „aproximovať".



Obrázok 8 Rozdiel pri použití tlačidiel „zjednodušiť" a „aproximovať"

Pomocou Derive môžeme aj roznásobovať a upravovať na súčin.

Úloha 2.2: Roznásobte $(a+b)^2$.
Riešenie:
Na to použijeme **Zjednodušiť** z ponuky. Najprv spomenutý výraz zadáme a presunieme kurzor na položku ponuky **Zjednodušiť**. Otvoríme ju a tu sa nám ponúkajú príkazy, ktoré môžeme použiť. Teraz použijeme **Roznásobiť**. Výsledok vidíme na nasledujúcom obrázku.



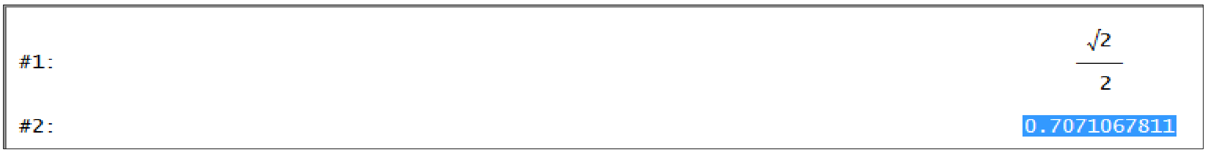
Obrázok 9 Použitie príkazu **Roznásobiť** z ponuky **Zjednodušiť**

V Derive možno vypočítať aj hodnoty výrazov s goniometrickými funkciami.

Úloha 2.3: Vypočítajte $\sin\frac{\pi}{4}$.

Riešenie:

Najprv si musíme tento výraz zapísať do príkazového riadka a potom použijeme tlačidlo „zjednodušiť“ resp. „aproximovať“z príkazového riadka. Pri zápise výrazu musíme zadať π z panela s matematickými symbolmi, znamená obsah jednotkovej kružnice, nie z panela s gréckymi symbolmi, ktoré znamená malé grécke písmeno pi. Výsledok použitia tlačidla „zjednodušiť“ je v prvom riadku, tlačidla „aproximovať“ v druhom riadku Obrázka 10.



Obrázok 10 Použitie tlačidiel „zjednodušiť“ a „aproximovať“ pri $\sin\frac{\pi}{4}$

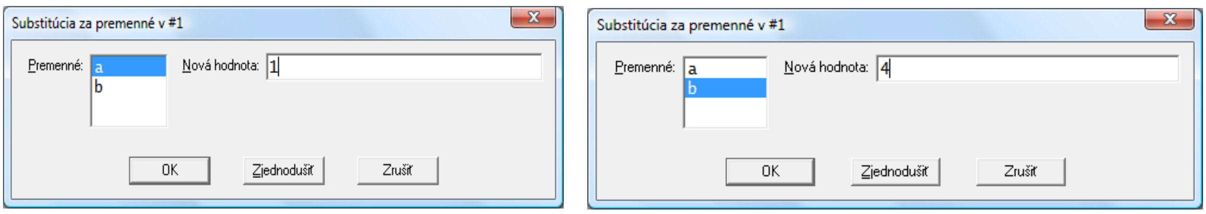
2.2 Dosadzovanie hodnôt do výrazu

V práci s výrazmi často potrebujeme do daného výrazu dosadiť nejakú číselnú hodnotu alebo opäť výraz. Ako dosadzovať hodnoty do výrazu si ukážeme v nasledujúcej úlohe.

Úloha 2.4: Vypočítajte hodnotu výrazu $(a-b)^3$ pre *a=1, b=4.*

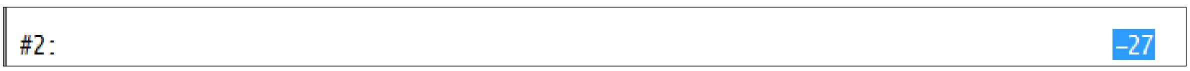
Riešenie:

Najskôr daný výraz zapíšeme do príkazového riadka a použijeme tlačidlo „zadať“. Pre vyčíslenie uvedeného výrazu pre dané hodnoty *a, b* musíme tieto hodnoty dosadiť do výrazu. Na to použijeme ponuku z menu **Zjednodušiť > Substitúcia premennej**, alebo klikneme na ikonu  z panela nástrojov. V otvorenom dialógovom okne najskôr nastavíme hodnotu premennej *a* na hodnotu 1, potom klikneme na druhú premennú *b,* ktorú nastavíme na hodnotu 4, tak ako je to na Obrázku 11.



Obrázok 11 Nastavenie hodnôt *a, b*

Kliknutím na **Zjednodušiť** dostaneme výsledok, ktorý je na Obrázku 12.



Obrázok 12 Výsledok substitúcie premennej

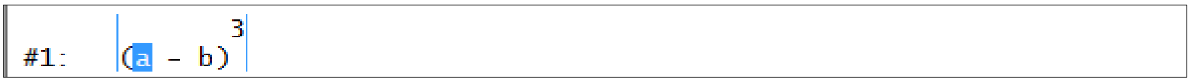
Vkladať výraz do výrazu si ukážeme v nasledujúcej úlohe.

Úloha 2.5: Vypočítajte hodnotu predchádzajúceho výrazu z úlohy 2.4 pre $a=4x-15$, $b=7+x$.

Riešenie:
Najskôr „vyčistíme“ premenné *a, b*, aby sme im mohli priradiť nové hodnoty. Čistenie premenných vykonáme pomocou „prázdneho“ priradenia (napr. *a:=*). Vidíme to na Obrázku 13.

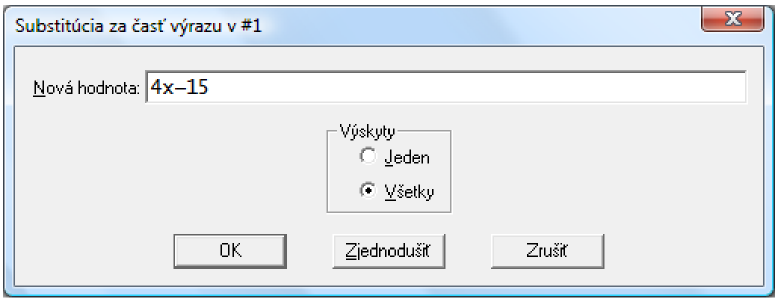
Obrázok 13 Čistenie premenných

Keďže výraz #1 už máme vložený v okne Algebra, využijeme ho. Vo výraze #1 dvojklikom označíme premennú *a*, tak ako to znázorňuje Obrázok 14.

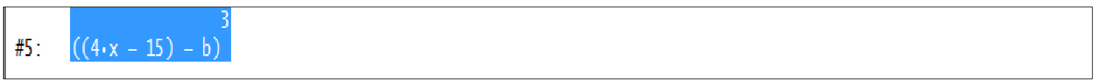


Obrázok 14 Označenie premennej a vo výraze

Ponukou z menu **Zjednodušiť > Substitúcia časti výrazu** zadáme hodnotu (4x-15) za *a* do poľa **Nová hodnota**. Dialógové okno na Obrázku 15 nám ponúka nahradiť len jeden výskyt výrazu alebo všetky. Možnosť **Všetky** je nastavená ako základná. Novú zadanú hodnotu potvrdíme **OK**. Hneď sa nám znázorní riadok #5 na Obrázku 16.



Obrázok 15 Dialógové okno Substitúcia za časť výrazu



Obrázok 16 Výsledok substitúcie za premennú *a* výrazu

Analogicky postupujeme pri substitúcii za premennú *b* výrazom (7+x). Po stlačení OK dostaneme riadok #6 na Obrázku 17 a výsledok ešte môžeme zjednodušiť pomocou tlačidla „zjednodušiť“ z panela nástrojov v príkazovom riadku, ale najprv výraz v riadku #6 musíme prekopírovať do príkazového riadka a potom stlačiť spomenuté tlačidlo. Dostávame výraz v riadku #7 Obrázka 17.

#6: $((4\cdot x - 15) - (7 + x))^3$

#7: $(3\cdot x - 22)^3$

Obrázok 17 Výsledok substitúcie za premenné *a, b* vo výraze a následné zjednodušenie

3 ROVNICE, NEROVNICE, SÚSTAVY ROVNÍC A NEROVNÍC

V praxi sa matematika využíva najmä pri riešení reálnych situácií prostredníctvom matematických modelov a matematických úloh, v ktorých významné miesto zaujímajú rovnice a nerovnice, resp. sústavy rovníc a nerovníc. V tejto podkapitole si ukážeme ako sa dajú riešiť rovnice a nerovnice v Derive.

3.1 Rovnice

Najprv si pripomeňme, čo je rovnica, jej definičný obor a koreň rovnice.

Rovnica je matematické vyjadrenie rovnosti medzi hodnotami dvoch výrazov. Tieto výrazy môžu obsahovať jednu alebo viacero premenných, ktoré v rovnici nazývame neznámymi.

Definičným oborom rovnice je prienik definičných oborov všetkých výrazov, ktoré sa v rovnici nachádzajú. Koreňom rovnice s jednou neznámou je číslo, ktoré po dosadení do obidvoch strán rovnice vytvára pravdivý výrok.

Ako riešiť rovnicu v Derive? Najprv do príkazového riadka treba napísať príslušnú rovnicu.
Jej riešenie nájdeme pomocou ikony  alebo príkazu z hlavného menu **Riešiť >Výraz**, pričom sa otvorí dialógové okno, v ktorom sa dá vybrať spôsob riešenia a definičný obor riešenia rovnice.

Spôsob riešenie môžeme zvoliť:
- algebraický: vtedy zadávame príkaz v Derive:
  - Solve(rovnica, neznáma v rovnici) – v množine komplexných čísel C
  - Solve(rovnica, neznáma v rovnici, Real) – v množine reálnych čísel R
- číselne: vtedy má príkaz tvar:
  - NSolve(rovnica, neznáma v rovnici) – v množine komplexných čísel C
  - NSolve(rovnica, neznáma v rovnici, Real) – v množine reálnych čísel R.

Ak chceme rovnicu riešiť na nejakom intervale, vtedy musíme nastaviť dolnú a hornú hranicu intervalu, v ktorom hľadáme riešenie. Príkaz vyzerá takto: NSolve(rovnica, neznáma v rovnici, *a, b*), kde *a* je dolná hranica intervalu a *b* horná hranica intervalu.

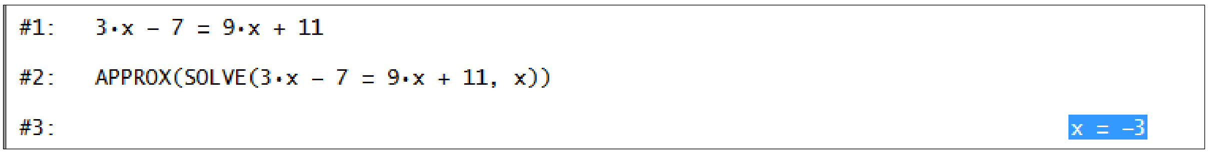
Rovnicu môžeme riešiť dvoma spôsobmi:
a) výpočtom
b) graficky

3.1.1 Riešenie rovníc výpočtom

Ukážkou riešenia rovnice výpočtom nám bude riešenie úlohy 3.1.

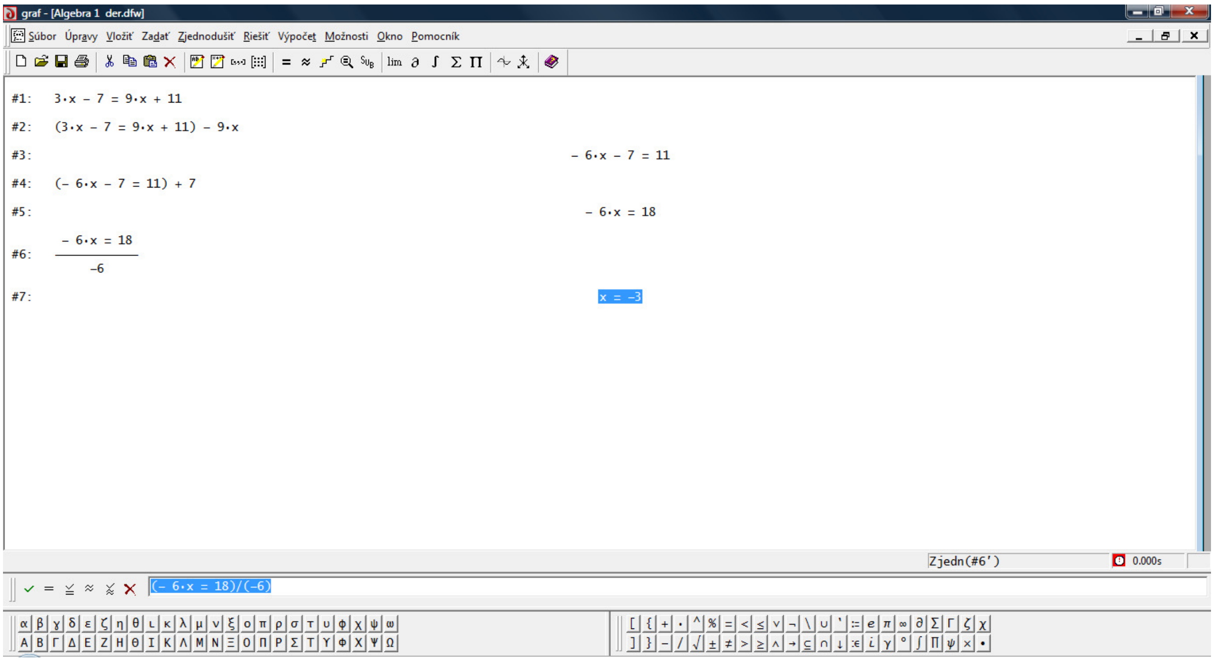
Úloha 3.1: Riešte lineárnu rovnicu 3x-7=9x+11.

Riešenie:
Do príkazového riadka zadáme rovnicu. Riešenie nájdeme stlačením tlačidla , alebo pomocou príkazu z hlavného menu **Riešiť >Výraz** a zvolíme spôsob **Oboje** v množine komplexných čísel (univerzálne riešenie). Potvrdíme kliknutím na **Riešiť** zobrazí sa nám riešenie tak, ako to je na Obrázku 18. Hľadané riešenie je x=4.



Obrázok 18 Riešenie rovnice použitím tlačidla

U žiakov uprednostňujeme druhý spôsob riešenia, tzv. riešenie postupné po častiach. Pri ňom postupujeme krok za krokom tak, ako pri riešení v zošite. Napíšeme rovnicu do príkazového riadka a stlačíme „zadať“. Vidíme, že pri jej riešení potrebujeme k obidvom jej stranám pripočítať –9x. Ak máme vyznačenú rovnicu #1, stlčíme F4 (skopíruje rovnicu #1 do zátvoriek príkazového riadka) a za zátvorku pripíšeme –9x a stlačíme „zadať a zjednodušiť“. Pribudnú nám riadky #2 a #3, tak ako to vidíme na Obrázku 19. Následne označíme rovnicu v #3, pomocou F4 ju skopírujeme do príkazového riadka a pripočítame k obidvom jej stranám 7. Pribudol nám riadok #4 a #5. Analogicky pomocou F4 skopírujeme rovnicu #5 do príkazového riadku a podelíme ju číslom –6 (t.z.za zátvorku pripíšeme /(-6)) znova stlačíme „zadať a zjednodušiť. Výsledok dostávame v #7.



Obrázok 19 Postupné riešenie rovnice v Derive

3.1.2 Riešenie rovníc graficky

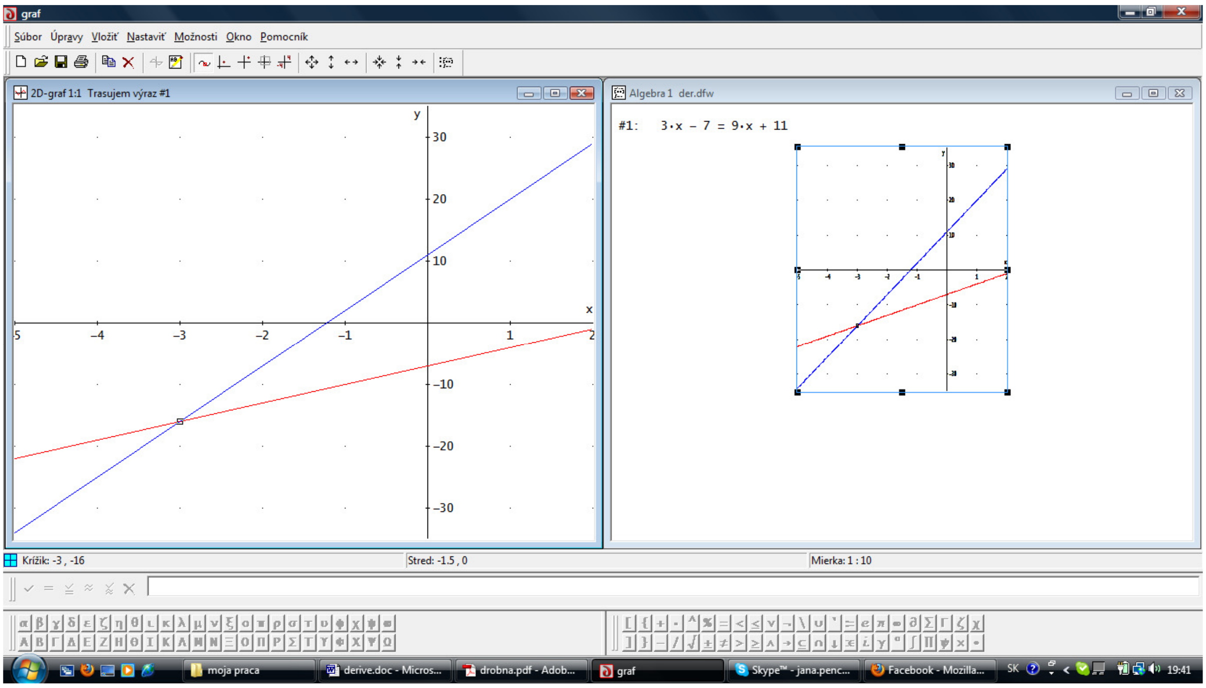
Ukážeme si grafické riešenie tej istej rovnice z úlohy 3.1.

Úloha 3.2: Riešte graficky rovnicu 3x-7=9x+11.

Riešenie:
Rovnicu najprv napíšeme do príkazového riadka a použijeme tlačidlo „zadať“. V rovnici v #1 vyznačíme len jej ľavú stranu tak, ako to vidíme na Obrázku 20.

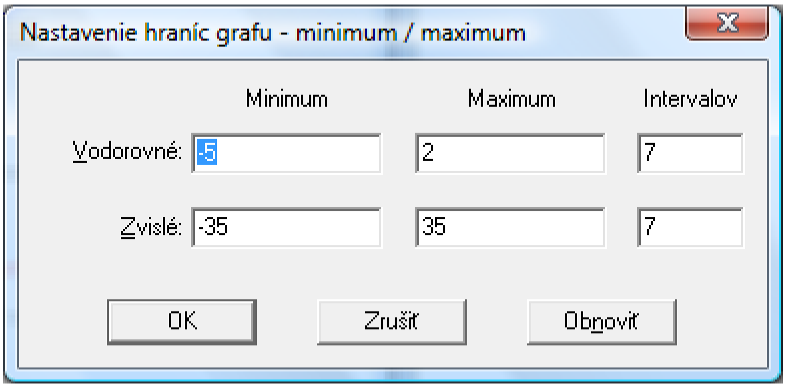
Obrázok 20 Vyznačenie ľavej strany rovnice

Otvoríme okno Grafika – 2D pomocou ikony , okná usporiadame vedľa seba **Okná > Usporiadať vedľa seba** a nakreslíme v ňom graf funkcie f(x)=3x-7 opäť kliknutím na tlačidlo . Následne vyznačíme pravú stranu rovnice v okne Algebra – 1, potom zmeníme aktívne okno, na Grafika – 2D, na okraj tohto okna a klikneme na tlačidlo . V tom istom grafickom okne máme zobrazené grafy dvoch funkcií, každý inou farbou. Súradnice bodu, ktorý je prienikom grafov oboch funkcií nájdeme trasovaním grafu, kliknutím na tlačidlo a kliknutím na priesečník grafov. Vypíšu sa nám súradnice krížika tak, ako je znázornené na Obrázku 21.



Obrázok 21 Grafické riešenie rovnice

Ak je priesečník grafov mimo obrázka, treba zmeniť hranice grafu **Nastaviť > Hranice grafu > Minimum/maximum.** Znázorní sa nám dialógové okno, ktoré je na Obrázku 22 a v ňom nastavíme hranice a počet intervalov.



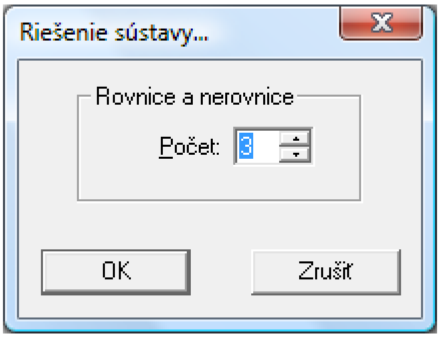
Obrázok 22 Nastavenie hraníc grafu – minimum/maximum

3.2 Sústavy rovníc

Sústava rovníc obsahuje dve resp. viac rovníc, ktoré majú byť splnené súčasne. Sústavu rovníc riešime použitím príkazu z hlavného menu **Riešiť > Sústava rovníc.** Postup si popíšeme na konkrétnej úlohe.

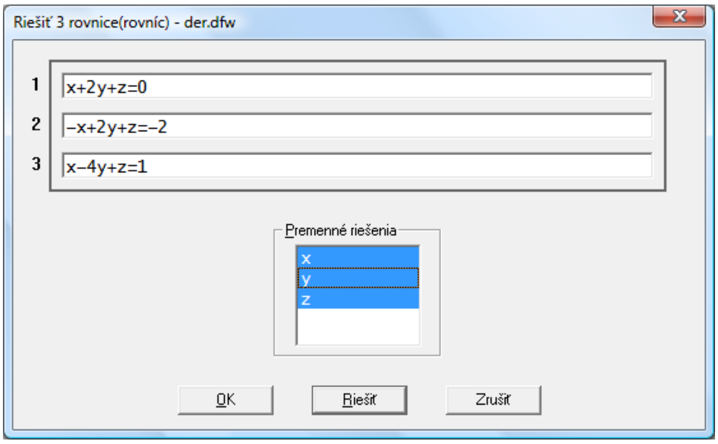
Úloha 3.3: Riešte sústavu rovníc
$$\begin{aligned} x+2y+z&=0\\ -x+2y+z&=-2\\ x-4y+z&=1 \end{aligned}$$

Riešenie:
Otvorí sa dialógové okno znázornené na Obrázku 23. Doňho zadáme počet rovníc sústavy a potvrdíme OK.



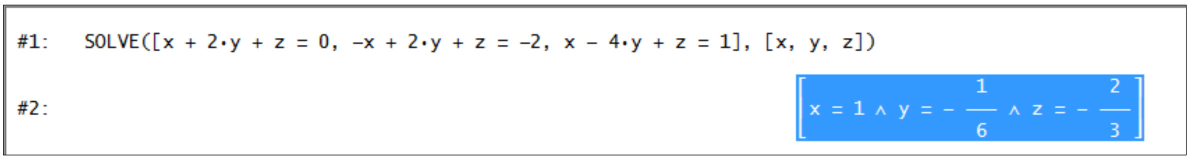
Obrázok 23 Dialógové okno Riešenie sústavy

Následne sa otvorí dialógové okno znázornené na Obrázku 24, do ktorého postupne zapíšeme jednotlivé rovnice. Potom klikneme do dolnej časti Premenné riešenia a automaticky sa zobrazia premenné x,y,z. Nakoniec v tomto dialógovom okne, na Obrázku 24, klikneme na „Riešiť“.



Obrázok 24 Dialógové okno zadania rovníc sústavy

V pracovnom okne Algebra 1 sa zobrazia dva riadky, znázornené na Obrázku 25. V druhom riadku je riešenie sústavy.

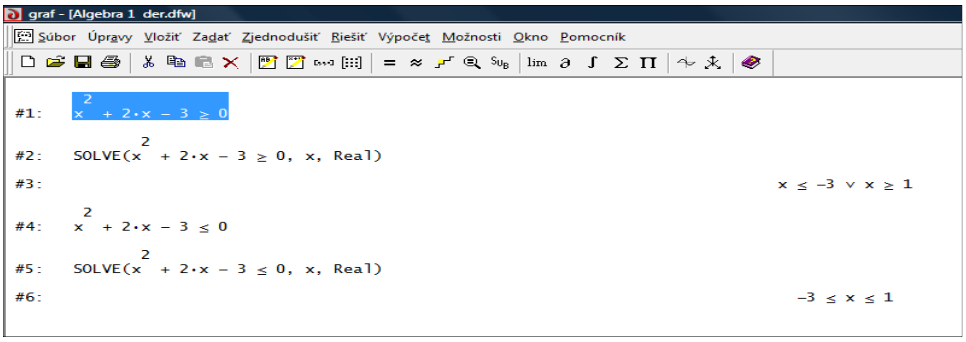


Obrázok 25 Riešenie sústavy rovníc

3.3 Nerovnice

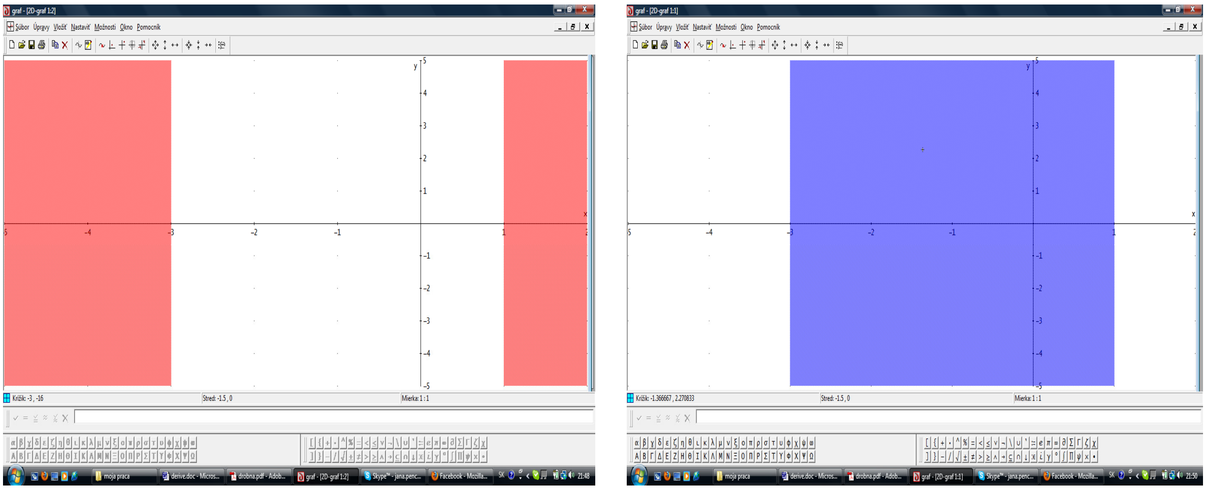
V Derive pri riešení rovníc postupujeme rovnako ako pri riešení rovníc.

Úloha 3.4: Riešte nerovnice $x^2 + 2x - 3 \geq 0$ a $x^2 + 2x - 3 \leq 0$
Riešenie:
Do príkazového riadka napíšeme nerovnicu a stlačíme „enter“ resp. „zadat“. Následne stlačíme tlačidlo  . V zobrazenom dialógovom okne vyberieme riešenie algebraické v množine reálnych čísel.



Obrázok 26 Algebraické riešenie nerovníc úlohy 3.4

Algebraické riešenie môžeme doplniť aj grafickým riešením v okne Grafika – 2D. Toto riešenie je znázornené na Obrázku 27.



Obrázok 27 Grafické riešenie nerovníc

Z ľavej časti Obrázka 27 je zrejmé, že riešením prvej nerovnice je $(-\infty,-3\rangle \cup \langle 1,\infty)$. Riešenie druhej nerovnice je na pravej strane toho isteho obrázka a pomocou intervalu ho možno zapísať v tvare $\langle -3,1\rangle$.

#1: $\mathrm{SOLVE}([x^2 + y^2 \le 9,\ x^2 - 1 \ge 0],\ [x,\ y])$

#2: $[x^2 + y^2 \le 9 \wedge x \ge 1,\ x^2 + y^2 \le 9 \wedge x \le -1]$

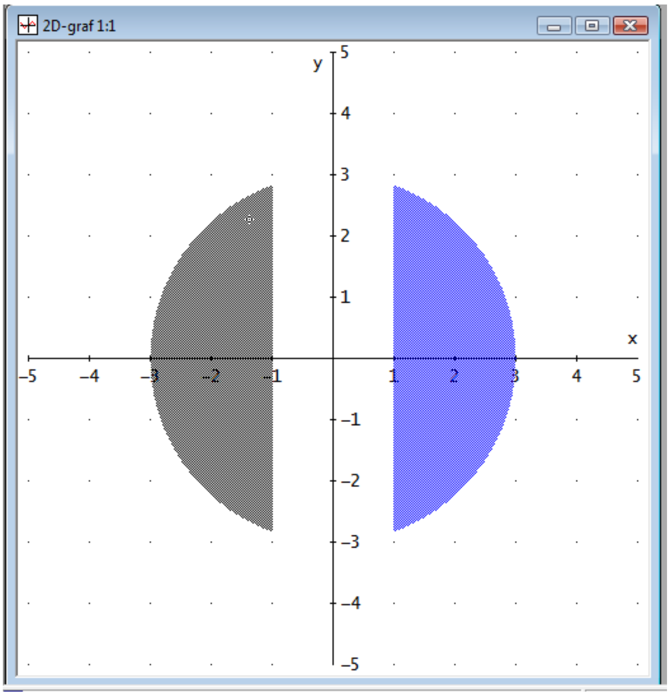
Obrázok 28 Riešenie sústavy nerovníc

3.4 Sústavy nerovníc

Pri riešení sústavy nerovníc postupujeme rovnako ako pri riešení sústavy rovníc. Použijeme tie isté príkazy z hlavného menu **Riešiť > Sústava rovníc.** Do prvého otvoreného okna zadáme počet nerovníc sústavy, do druhého zapíšeme jednotlivé nerovnice. Po kliknutí na Riešiť, v pracovnom okne sa zobrazí riešenie, tak ako vidíme na Obrázku 28 pri riešení následovnej úlohy.

Úloha 3.5: Riešte sústavu nerovníc $\begin{matrix} x^2 + y^2 \le 9 \\ x^2 - 1 \ge 0 \end{matrix}$.

Riešenie:
Postupujeme podľa popisu pred úlohou 3.5. Na Obrázku 29 vidíme grafickú interpretáciu riešenia spomínanej sústavy nerovníc v okne Grafika – 2D. Pri jej zobrazení postupujeme rovnako ako pri grafickom riešení sústavy rovníc.



Obrázok 29 Grafická interpretácia riešenia sústavy nerovníc

Riešením sústavy nerovníc je $\langle -3,-1\rangle \cup \langle 1,3\rangle$.

4 Polynómy

Pod pojmom polynóm n-tého stupňa premennej x rozumieme výraz tvaru $P_n(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + ... + a_2 x^2 + a_1 x + a_0$, kde $n \in N$ sa nazýva stupeň polynómu; $a_0, a_1, ..., a_n; a_n \neq 0$ sa nazývajú koeficienty polynómu.

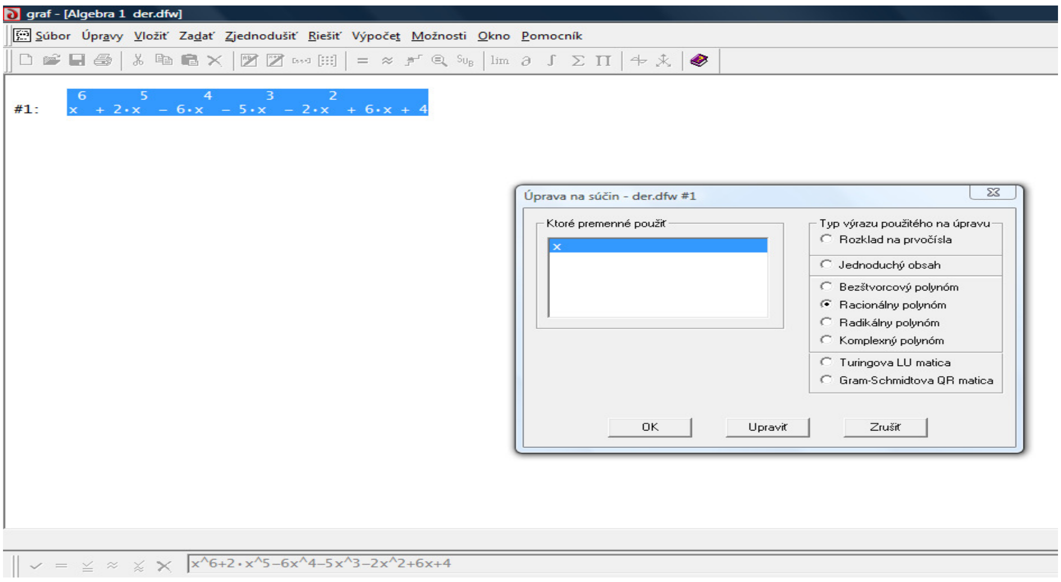
Myslíme, že zistiť hodnotu polynómu pre nejakú určenú hodnotu x, by vzhľadom na podkapitou 2.2 nebol problém. Tiež sa nebudeme venovať v tejto podkapitole deleniu polynómu polynómom, nakoľko by to použitím znalostí z podkapitoly 2.1 bolo jednoduché.

Teraz sa budeme zaoberať rozkladom polynómu na súčin koreňových činiteľov. Poďme riešiť následnú ulohu.

Úloha 4.1: Výraz $x^6 + 2x^5 - 6x^4 - 5x^3 - 2x^2 + 6x + 4$ rozložte na súčin koreňových činiteľov.

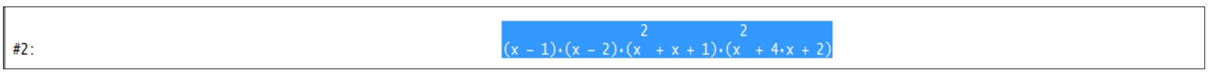
Riešenie:

Úlohu vyriešime použitím príkazu z hlavného nenu **Zjednodušiť>Upraviť na súčin.** Použitím tohto príkazu sa polynóm rozloží na súčin polynómov čo najnižšieho stupňa. Záleží len na nás, na súčin „akých polynómov chceme daný polynóm rozložiť. Môžeme sa rozhodnúť pre racionálny polynóm, resp. radikálny (t.z. s iracionálnymi koeficientmi alebo komplexný.Riešiť uvedený polynóm si ukážeme na nasledujúcich obrázkoch.



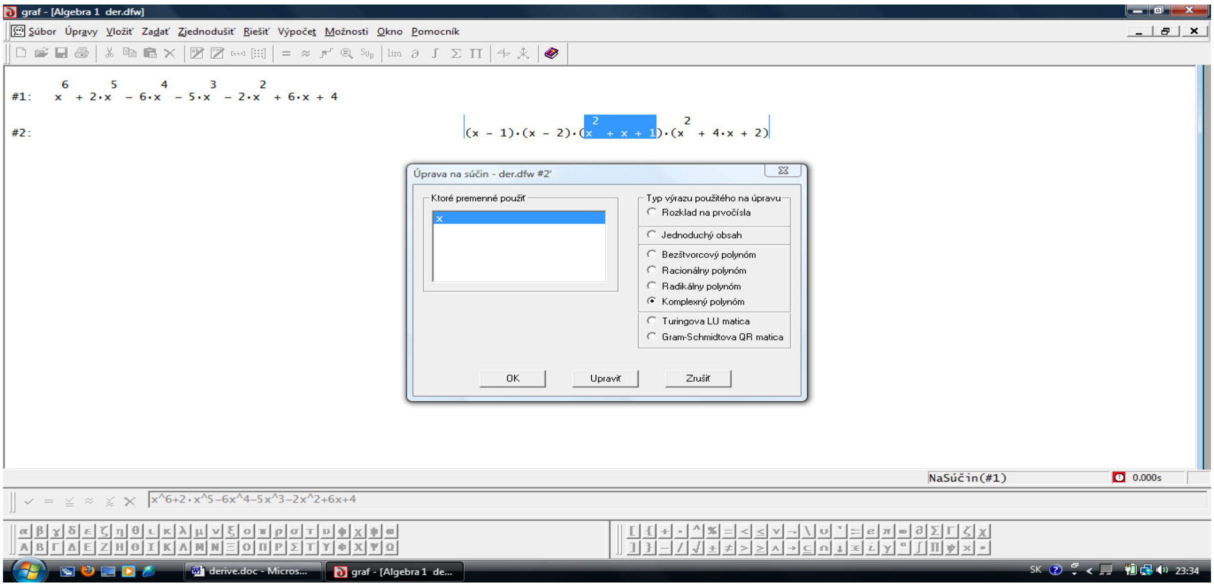
Obrázok 30 Rozklad polynómu na súčin racionálnych polynómov

Po kliknutí na „Upraviť",na pracovnej ploche sa nám zobrazí riadok na Obrázku 31.



Obrázok 31 Výsledok rozkladu polynómu na súčin racionálnych polynómov

Ešte rozložme polynóm $x^2 + x + 1$ na súčin komplexných polynómov. Označíme si tento polynóm a použime už spomínaný príkaz **Zjednodušiť>Upraviť na súčin.** Len tentokrát budeme upravovať na súčin komplexných polynómov. Vidíme to na Obrázku 32.



Obrázok 32 Rozklad výrazu $x^2 + x + 1$ na iracionálne korene

Po úprave dostávame výsledok na Obrázku 33.

$$\#2: \quad (x - 1)\cdot(x - 2)\cdot(x^2 + x + 1)\cdot(x^2 + 4\cdot x + 2)$$

$$\#3: \quad (x - 1)\cdot(x - 2)\cdot\left(\left(x + \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}\cdot i}{2}\right)\cdot\left(x + \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}\cdot i}{2}\right)\right)\cdot(x^2 + 4\cdot x + 2)$$

Obrázok 33 Výsledok rozkladu výrazu $x^2 + x + 1$ na iracionálne korene

Analogicky rozložíme $x^2 + 4x + 2$ na súčin polynómov s iracionálnymi koeficientmi. V dialógovom okne – Úprava na súčin označíme Radikálny polynóm. Takto dostaneme všetky koreňové činitele daného polynómu. Riadok s touto vyriešenou úlohou je na Obrázku 34.

$$(x - 1)\cdot(x - 2)\cdot\left(\left(x + \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}\cdot i}{2}\right)\cdot\left(x + \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}\cdot i}{2}\right)\right)\cdot((x + \sqrt{2} + 2)\cdot(x - \sqrt{2} + 2))$$

Obrázok 34 Výsledok riešenie Úlohy 4.1

5 Funkcia jednej premennej

Na úvod funkcií si pripomeňme definíciu funkcie.
Nech neprázdna množina *M* je podmnožinou množiny *R*. Predpis, ktorý každému prvku *x* z množiny *M* priradí práve jedno *y* z množiny *R* sa nazýva funkcia. Množinu *M* nazývame definičným oborom funkcie a označujeme *D(f)*. Číslo *y* nazývame hodnotou funkcie *f* v bode *x*. Množinu všetkých hodnôt funkcie *f* nazývame oborom hodnôt funkcie *f* a označujeme *H*(*f*).

Grafom funkcie f rozumieme množinu všetkých bodov [x,y] v rovine, pre ktoré platí *y=f(x)*, kde *x* je z *D(f)* a *y* je z *H(f)*.

V podkapitolách Funkcie jednej premennej uvedieme vždy definíciu tej-ktorej funkcie a následne nejaké úlohy.

5.1 Lineárna funkcia

Lineárnou funkciou nazývame každú funkciu tvaru $y=ax+b$, kde $a,b \in R$, $a\neq 0$. Grafom lineárnej funkcie je priamka. Ak $a<0$ funkcia je klesajúca, ak $a=0$ je konštantná, ak $a>0$ je rastúca.

Ak by sme mali úlohu nakresliť graf funkcie, postupovali by sme tak, ako pri riešení rovnice graficky v úlohe 3.2 v podkapitole 3.1.2. Ak by sme chceli graf aj poísať, klikneme na ikonu , alebo v hlavnej ponuke na **Vložiť>Poznámka** a do otvoreného dialógového okna, zadáme požadovaný text a jeho umiestnenie v grafickom okne v poli **Pozícia.**

5.2 Funkcia s absolútnou hodnotou

V tejto podkapitole by sme upozornili len na zápis absolútnej hodnoty do príkazového riadku programu Derive.

Ak by sme do príkazového riadka potrebovali zadať predpis funkcie $y=|x-1|$ "derivovsky"zápis by vyzeral takto: y =Abs(x-1). Ďalej by sme postupovali podľa uvedeného postupu v 3.1.2.

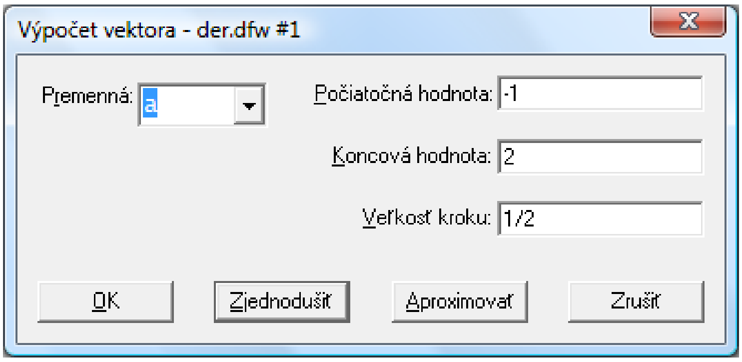
Patrilo by sa podotknúť, že v Derive možno kresliť grafy aj pomerne náročných funkcií obsahujúcich absolútnu hodnotu.

5.3 Kvadratická funkcia

Kvadratickou funkciou nazývame každú funkciu, ktorá je daná rovnicou $y=ax^2+bx+c$, kde $a,b\in R,\ a\neq 0$. Grafom kvadratickej funkcie je parabola s vrcholom V$\left[-\frac{b}{2a}, c-\frac{b^2}{4a}\right]$. Ak $a<0$ funkcia konkávna, ak $a>0$ je konvexná.

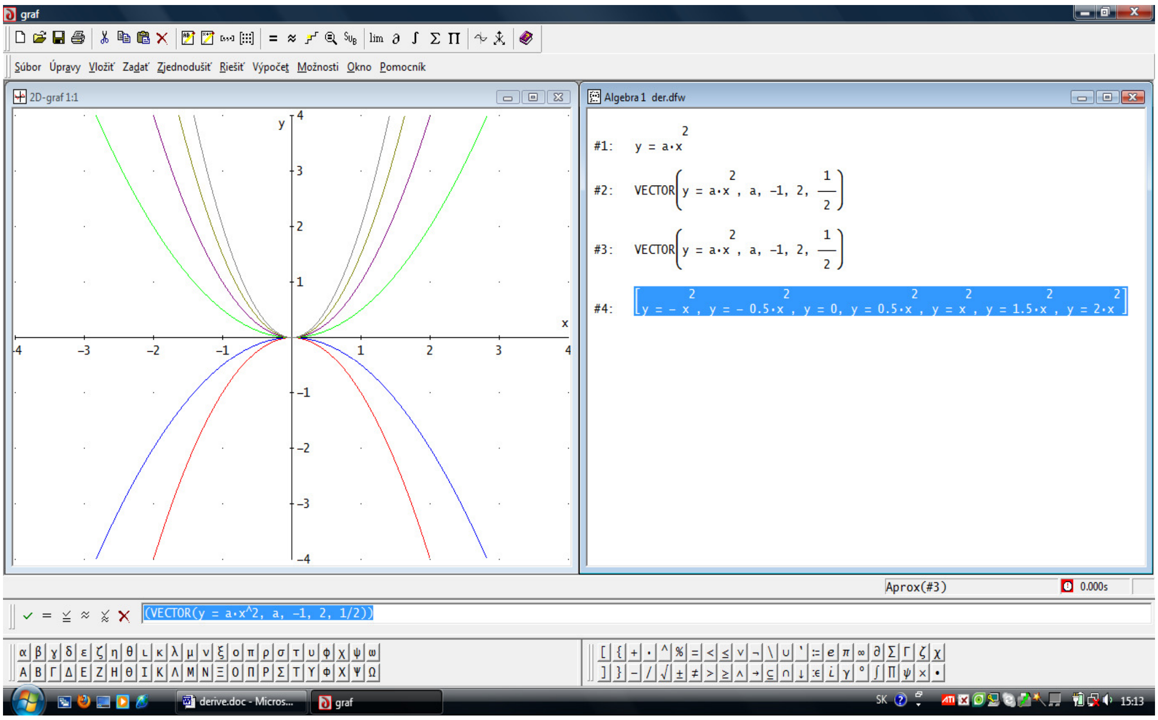
Graf konkrétnej kvadratickej funkcie v progame Derive zostrojíme rovnako ako graf ktorejkoľvek inej funkcie. Ale ukážeme si, ako môžeme zadať funkciu všeobecne a meniť jej parametre a zostrojovať grafy vzniknutých funkcií.

Úloha 5.1: Nakreslite graf funkcie f: $y=ax^2$ pre rôzne hodnoty parametra a.
Riešenie:
Zadáme funkciu a použijeme príkaz **Výpočet > Vektor**. V dialógovom okne nastavíme rozpätie pre parameter a a nastavíme aj krok k, s ktorým sa bude tento parameter meniť. V tomto prípade zvolíme hranice pre a od –1 po 2 s krokom $k=\frac{1}{2}$, tak ako je ukázané na Obrázku 35.



Obrázok 35 Nastavenie parametra a v dialógovom okne Výpočet vektora

V okne Grafika - 2D v **Možnosti** si nastavíme, ak nie je, možnosť **Popísať nové grafy** a **Aproximovať pred kreslením**, potom stačí popisy grafov, ktoré sa objavia vľavo hore ako legenda, umiestniť k príslušným grafom podľa farby.



Obrázok 36 Výsledok riešenia úlohy 5.1

5.4 Mocninová funkcia

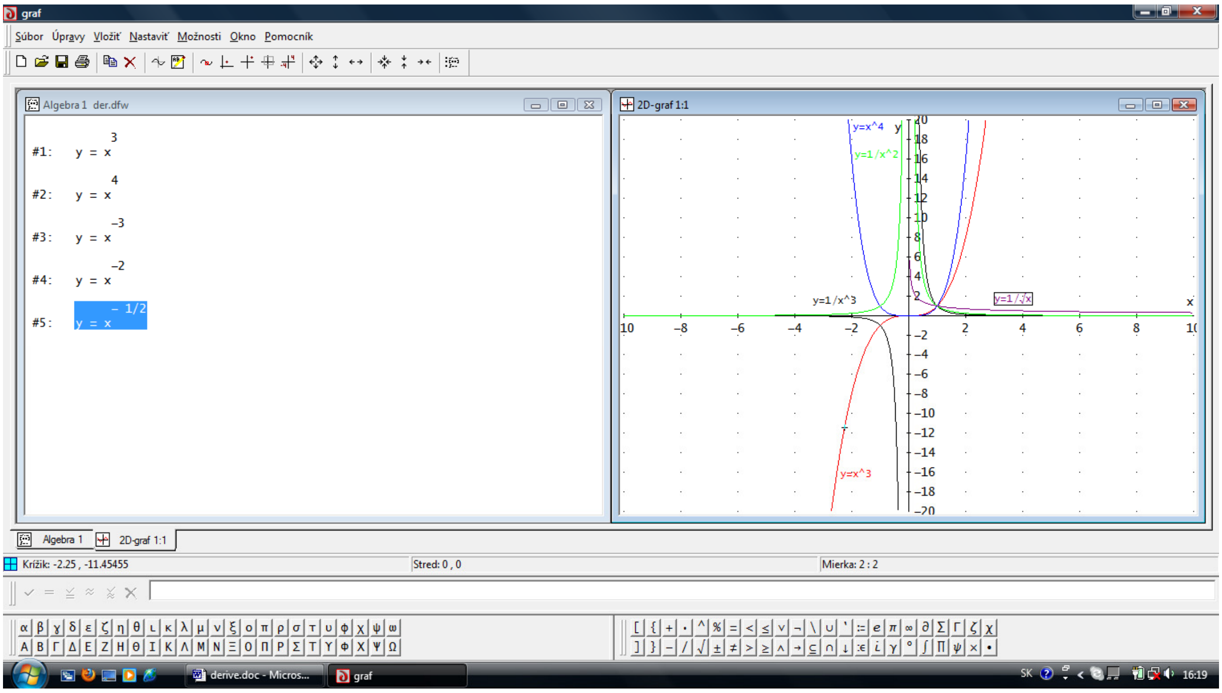
Každú funkciu tvaru $y=a.x^n$, pre x>0, kde *a, n* sú ľubovoľné reálne čísla nazývame mocninová funkcia. Ak *n* je prirodzené číslo, tak $y=a.x^n$ je definovaná na intervale (-∝,∝).

Rozoberme teraz všetky typy grafov:

1. Ak *a* je kladné nepárne celé číslo a *b* je kladné číslo, tak obor hodnôt funkcie je *R*, potom funkcia je nepárna a rastúca.
2. Ak *a* je kladné nepárne celé číslo a *b* je záporné číslo, tak obor hodnôt funkcie je *R*, potom funkcia je nepárna a klesajúca.
3. Ak *a* je kladné párne celé číslo a *b* je kladné číslo, tak obor hodnôt funkcie je $\langle 0,\infty \rangle$, funkcia je párna, konvexná.
4. Ak *a* je kladné párne celé číslo a *b* je záporné číslo, tak obor hodnôt funkcie je $(-\infty,0\rangle$, funkcia je párna, konkávna.
5. Ak *a* je záporné párne celé číslo a *b* je kladné číslo, obor hodnôt funkcie je (0,∝), funkcia je párna.
6. Ak *a* je záporné párne celé číslo a *b* je záporné číslo, obor hodnôt funkcie je (-∝,0), funkcia je párna.
7. Ak *a* je záporné nepárne celé číslo a *b* je kladné číslo, obor hodnôt funkcie je*R*, funkcia je nepárna.
8. Ak *a* je záporné nepárne celé číslo a *b* je záporné číslo, obor hodnôt funkcie je *R*, funkcia je nepárna.

Špeciálnym typom mocninových funkcií sú funkcie, pre ktoré je 0<*a*<1.

Úloha 5.2: Nakreslite do jedného obrázka grafy funkcií: $y=x^3$, $y=x^4$, $y=x^{-3}$, $y=x^{-2}$, $y=x^{1/2}$.
Riešenie:

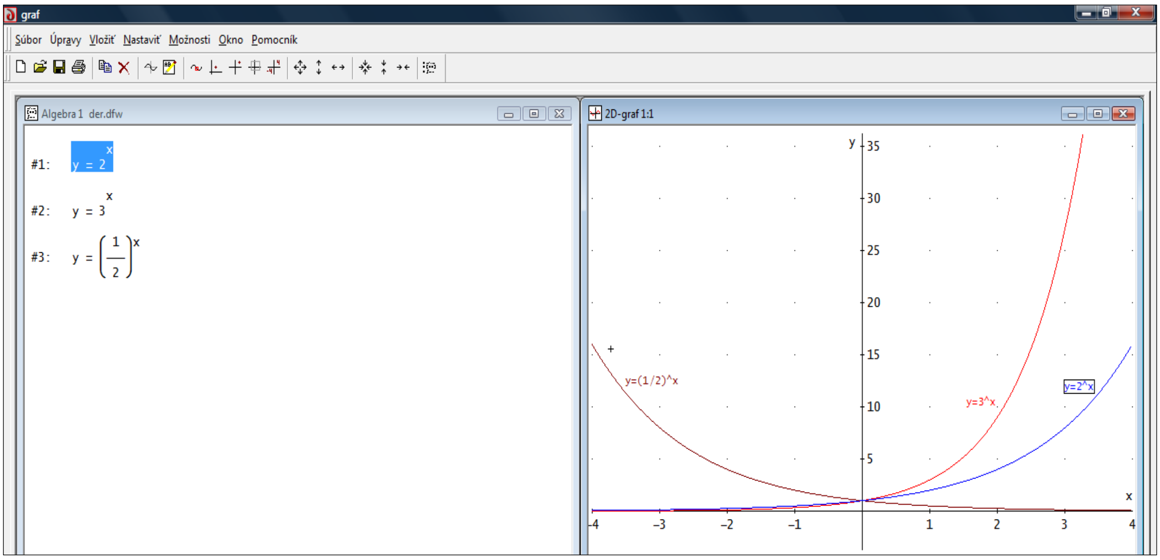


Obrázok 37 Výsledok riešenia úlohy 5.2

5.5 Exponenciálna funkcia

Funkciu *f:* $y=a^x$, kde $a>0$, $a\neq 1$ sa nazýva exponenciálna funkcia, pričom $D(f)=R$, $H(f)=(0,\infty)$. Ak $a>1$, exponenciálna funkcia je rastúca, ak $0<a<1$ funkcia je klesajúca.

Úloha 5. 3: Nakreslite grafy $y=2^x$, $y=3^x$, $y=(1/2)^x$.
Riešenie:



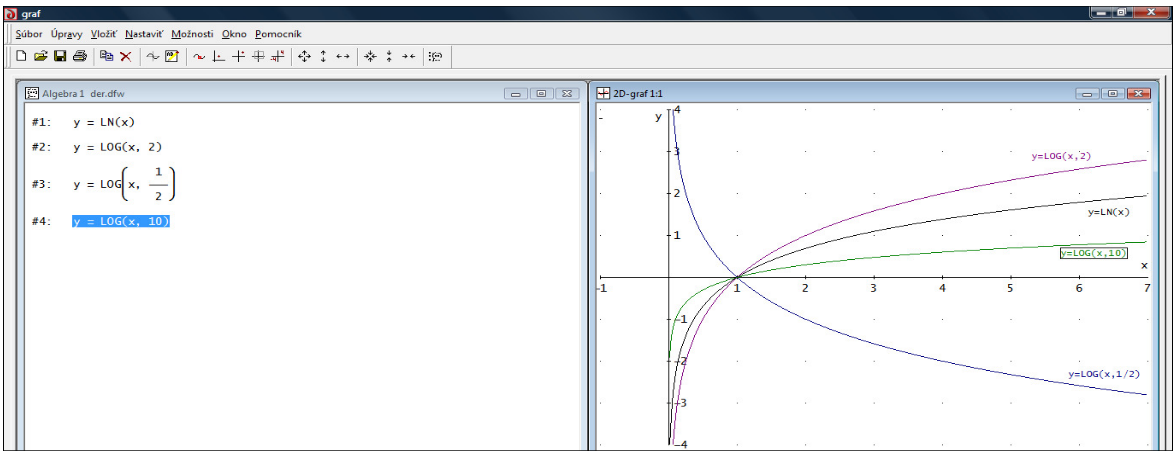
Obrázok 38 Výsledok riešenie úlohy 5.3

5.6 Logaritmická funkcia

Inverznou funkciou k exponenciálnej funkcii $y=a^x$, kde $a>0$, $a\neq 1$ je logaritmická funkcia $y=\log_a x$, kde $a>0$, $a\neq 1$. Definičný obor logaritmickej funkcie je $D(f)=(0,\infty)$, obor hodnôt $H(f)=(-\infty,\infty)$. Pre $a>1$ je funkcia rastúca, ak $0<a<1$ je funkcia klesajúca.

Je dôležité vedieť, že prirodzený logaritmus čísla *x* v Derive zapisujeme *LN(x)*, logaritmus *x* pri základe *a* zapíšeme *LOG(x,a)* a analogicky dekadický logaritmus *LOG(x,10)*.

Úloha 5.4: Nakreslite grafy funkcií: $y=\ln x$, $y=\log_2 x$, $y=\log_{1/2} x$, $y=\log x$.
Riešenie:



Obrázok 39 Výsledok riešenia úlohy 5.4

5.7 Goniometrická funkcia

Treba pripomenúť, že parametrom goniometrických funkcií je uhol. Uhly môžu byť dané v oblúkovej resp. v stupňovej miere. Ak sa zadávajú v oblúkovej miere, používa sa konštanta π (predstavuje plochu kruhu s polomerom 1; na jeho zápis v Derive sa používa π na matematickom paneli, alebo stlačením Ctrl+P, alebo napísaním pi do príkazového riadku), ak v stupňovej miere používa sa znak stupeň (° - na matematickom paneli, alebo stlačením Ctrl+O, alebo napísaním deg do príkazového riadka).

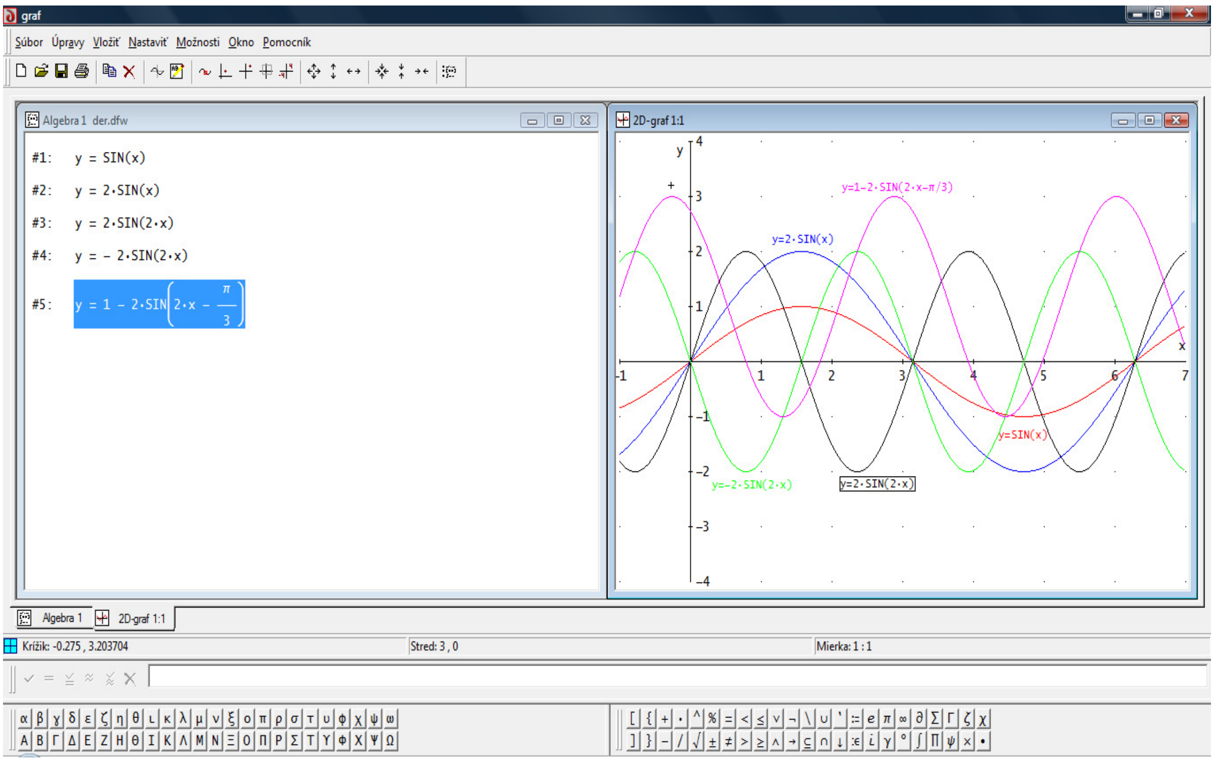
Základnými goniometrickými funkciami sú:

- SIN(x) - sínus uhla x.
- COS(x) - kosínus uhla x.
- TAN(x) - tangens uhla x a rovná sa podielu SIN(x)/COS(x)
- COT(x) - kotangens uhla x a rovná sa COS(x)/SIN(x)

Úloha 5.5: Nakreslite graf funkcie $f\colon\ y = 1 - 2\sin\left(2x - \frac{\pi}{3}\right)$.

Riešenie:

Graf zadanej funkcie budeme kresliť postupne. Najprv nakreslíme graf základnej funkcie y=sin$x$ a funkcie y=2.sin$x$ do jedného obrázka. Následne y=2.sin2x, potom y=-2.sin2x a na záver graf danej funkcie.



Obrázok 40 Výsledok riešenia úlohy 5.5

5.8 Inverzná funkcia

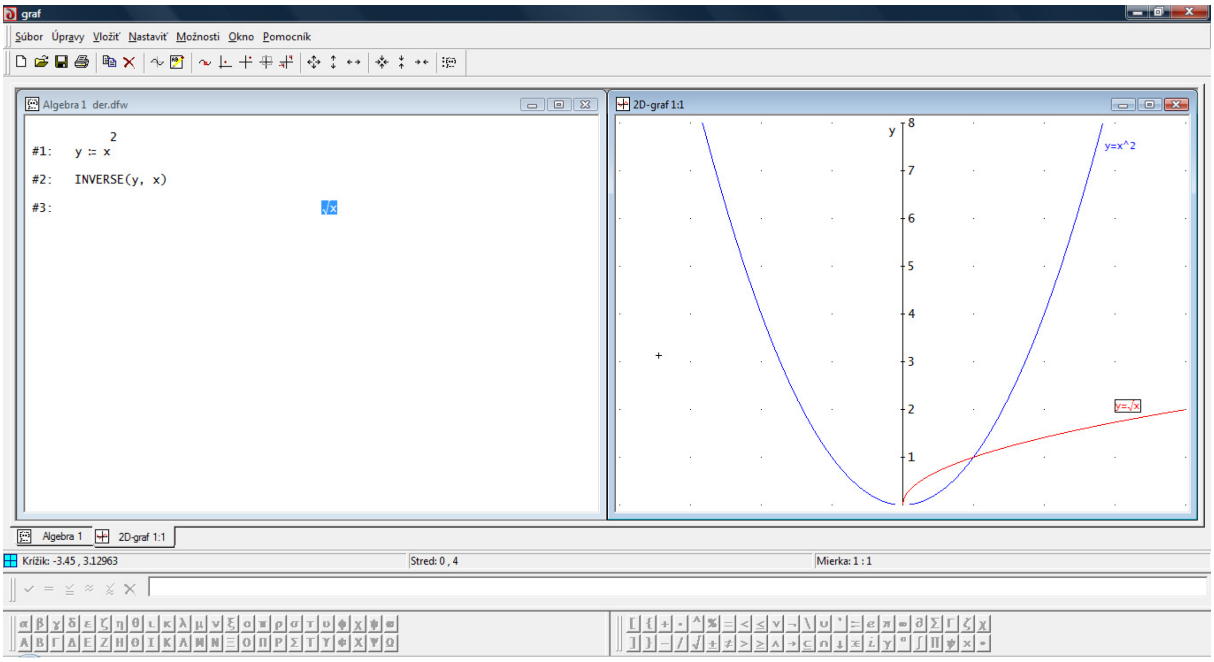
Ak je funkcia $y = f(x)$ prostá na množine M, ktorá je podmnožinou definičného oboru funkcie a jej oborom hodnôt je množina N, môžeme na množine N definovať funkciu, ktorá každému y z množiny N priradí práve jedno x z množiny M, pre ktoré platí $y = f(x)$, čiže $f^{-1}(y) = x$. Takáto funkcia sa nazýva inverznou funkciou k funkcii f a označujeme ju f^{-1}.

Úloha 5.6: Nájdite a nakreslite graf inverznej funkcie k funkcii $y = x^2$, pričom x je z množiny nezáporných čísel.

Riešenie:

Najskôr zadáme funkciu $y = x^2$ do príkazového riadka. y : = x∧2. Dôležité je v zápise neprehliadnuť znak priradenia!

Na hľadanie inverznej funkcie použijeme príkaz **INVERSE(y,x)**. Po stlačení „zadať a zjednodušiť" nám program nájde predpis inverznej funkcie. Miesto y môžeme zadať aj x^2. Po nájdení inverznej funkcie, obe funkcie zakreslíme do jedného grafu, tak ako je na Obrázku 41.



Obrázok 41 Výsledok riešenia úlohy 5.6

6 Vektorová a analytická geometria

Program Derive môžeme využiť aj pri výučbe geometrie. Výhodou programu jako sme už spomenuli vyššie je jednoduchý zápis výrazov a prechod od algebraického zápisu ku grafu. Derive nám pomôže pri vizualizácii, popisovaní geometrických vzťahov a pomocou symbolických výpočtov umožňuje dokazovať rôzne geometrické vlastnosti.

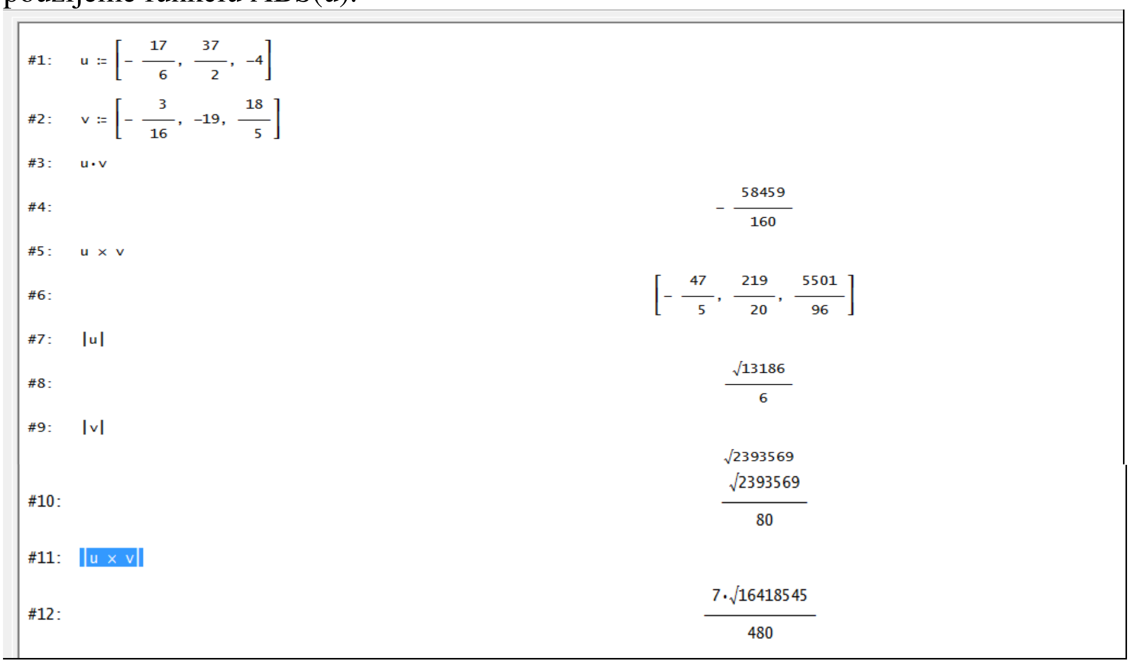
6.1 Operácie s vektormi

V programe Derive môžeme vektor zapísať tromi spôsobmi. Buď pomocou príkazu ***Zadať>Vektor,*** alebo pomocou tlačidla  , alebo zapísaním do príkazového riadka.

Vektor definujeme vždy v hranatých zátvorkách!

Úloha 6.1: Vypočítajte skalárny a vektorový súčin vektorov $\vec{u} = \left(-\frac{17}{6}, \frac{37}{2}, -4\right)$ a $\vec{v} = \left(-\frac{3}{16}, -19, \frac{18}{5}\right)$ a zistite veľkosť vektorov.

Riešenie:
Zapíšeme vektory jedným z uvedených spôsobov. Pre výpočet skalárneho súčinu použijeme tlačidlo „krát (.)“z panela s matematickými symbolmi, alebo zapíšeme do príkazového riadku u*v. Pre výpočet vektorového súčinu použijeme tlačidlo „vektorový súčin (x)“ z panela matematických nástrojov, alebo funkciu CROSS (u,v). Na výpočet veľkosti vektorov použijeme funkciu ABS(u).



Obrázok 42 Výsledok riešenia úlohy 6.1

6.2 Vzájomná poloha priamok a rovín

V tejto podkapitole by sme hneď začali úlohami.

Úloha 6.2: Určte vzájomnú polohu priamok p: 2x-y+6=0, q: x = 1-2t, y=3+t; t ∈ R. Ak sú rôznobežné nájdite súradnice ich priesečníka.

Riešenie: Ak predpokladáme, že priamky majú spoločný bod, jeho súradnice musia vyhovovať obom rovniciam. Do rovnice priamky *p* dosadíme za *x*, *y* rovnice priamky *q*. Použijeme príkaz ***Riešiť>Výraz.*** Vyjde nám jediné riešenie, čiže priamky majú jeden spoločný bod a sú rôznobežné. Ak chceme určiť súradnice priesečníka, dosadíme vypočítaný parameter do rovníc priamky *q*.

```
#1:   2·x - y + 6 = 0

#2:   x = 1 - 2·t

#3:   y = 3 + t

#4:   2·(1 - 2·t) - (3 + t) + 6 = 0

#5:   SOLVE(2·(1 - 2·t) - (3 + t) + 6 = 0, t, Real)

#6:                               t = 1

#7:                      x = 1 - 2·1 = (x = -1)

#8:                        y = 3 + 1 = (y = 4)
```

Obrázok 43 Výsledok riešenia úlohy 6.2

Priamky sú rôznobežné a pretínajú sa v priesečníku [-1,4].

Úloha 6.3: Nájdite bod Q súmerne združený s bodom P[2, 1, -2] podľa roviny ρ: x+2y-3z+4=0 a vypočítajte vzdialenosť bodu P od roviny ρ.

Riešenie:
Súmerne združený bod k bodu P bude ležať na priamke kolmej na danú rovinu. Musíme teda bodom P preložiť priamku *p* kolmú na rovinu ρ. Normálový vektor roviny ρ je zároveň smerovým vektorom priamky *p*. Keďže už máme bod a vektor, vieme si určiť parametricky priamku *p* (#5 na Obrázku 44).

Nájdeme priesečník S priamky *p* a roviny ρ. Ten vypočítame tak, že do rovnice roviny dosadíme za *x, y , z* rovnice priamky *p*. Dáme riešiť výraz a dostaneme parameter t. Ten dosadíme do rovníc priamky *p* a dostaneme súradnice bodu S. Pre bod Q súmerne združený s bodom P platí, že $Q = 2S - P$. Vzdialenosť bodu P od roviny vypočítame pomocou funkcie ABS(P-S).

```
#1:   ρ := x + 2·y − 3·z + 4 = 0
#2:   P := [2, 1, −2]
#3:   sp := [1, 2, −3]
#4:   X := [P + sp·t]
#5:                      X := [[t + 2, 2·t + 1, − 3·t − 2]]
#6:   SOLVE((t + 2) + 2·(2·t + 1) − 3·(− 3·t − 2) + 4 = 0, t, Real)
#7:                                     t = −1
#8:   S := [−1 + 2, 2·(−1) + 1, − 3·(−1) − 2]
#9:                               S := [1, −1, 1]
#10:  Q := 2·S − P
#11:                              Q := [0, −3, 4]
#12:  |P − S|
#13:                                     √14
#14:                                 3.741657386
```

Obrázok 44 Výsledok riešenia úlohy 6.3

7 Postupnosti reálnych čísel

7.1 Základné pojmy

Pod postupnosťou rozumieme funkciu *f* definovanú na množine všetkých prirodzených čísel, t. j. *D(f)* = {1, 2, 3, ..., n, ...}. Hodnotu *f* v čísle *n* označujeme $a_n = f(n)$ a nazývame ju *n* – tým členom postupnosti.

Postupnosť, ktorej členy sú reálne čísla $a_1, a_2, a_3, ..., a_n, ...$, označujeme $\{a_1, a_2, a_3, ..., a_n, ...\}$ alebo $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$.
Základné vlastnosti postupnosti sú: rastúca, klesajúca, ohraničená, konečná a nekonečná.
Postupnosť poznáme (okrem iných) aj aritmetickú a geometrickú.

Postupnosť $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ je aritmetická, ak existuje také číslo *d* nazývané diferencia, že pre každé $n \in N$ platí $a_{n+1} = a_n + d$, pričom $a_n = a_1 + (n-1).d$. Súčet prvých *n* členov tejto postupnosti je $s_n = \frac{n}{2}(a_1 + a_n)$.
Postupnosť $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ je geometrická, ak existuje také číslo *q* nazývané qvocient, že pre každé $n \in N$ platí $a_{n+1} = a_n.q$, pričom $a_n = a_1.q^{n-1}$ a súčet prvých *n* členov tejto postupnosti je $s_n = a_1 \frac{q^n - 1}{q - 1}, q \neq 1$.

7.2 Postupnosť zadaná ako vektor

V Derive pracujeme s postupnosťami na podobnom princípe ako s vektormi. Postupnosť definujeme ako vektorovú funkciu vector([n,*a*(n)], n, ZH, KH, k), ktorá používa nasledovné parametre:

- [n,a(n)] – množina bodov X[x,y], pričom x = n, y = a(n), ktoré tvoria graf postupnosti,
- n – je „indexová“ premenná,
- *a*(n) – je všeobecný predpis prvkov. Pri definovaní prvkov postupnosti sa používa znak priradenia (:=), ktorý spôsobí priradenie predpisu prvkov do premennej a(n).

Napr. postupnosť a_n, ktorej prvky majú predpis $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$, sa definuje nasledovne: *a*(n):=(1+1/n)^n,

- ZH – začiatočná hodnota indexovej premennej alebo vektor všetkých hodnôt „indexovej“ premennej,
- KH – konečná (posledná) hodnota indexovej premennej,
- K – veľkosť kroku indexovej premennej. Napr. pre n = 1,4,7,10, ... je veľkosť kroku k = 3.

Poznámka: Ak ZH predstavuje vektor všetkých hodnôt indexovej premennej, zadáme ho vymenovaním všetkých hodnôt n, pričom KH a k užvo vektorovej funkcii neuvádzame. Napr. vector([n,a(n)], n, ([1,2,...,10]).

Poznámka: ak parameter k vynecháme v zápise, Derive automaticky pracuje s krokom k = 1.

Ak vektorovú funkciu vector([n,a(n)], n, ZH, KH, k) zadáme a súčasne zjednodušíme tlačidlom „zadať a zjednodušiť" resp. aproximujeme pomocou výsledkom je matica s dvoma stĺpcami a n riadkami. Prvý stĺpec obsahuje hodnoty n, druhy hodnoty a(n).

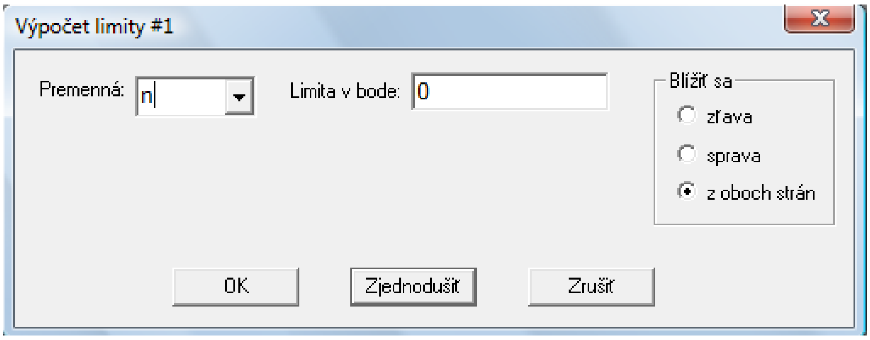
Ak chceme poznať iba hodnoty a_n, použijeme príkaz vector(a(n), n, ZH, KH, k).

7.3 Limita postupnosti

Číslo a sa nazýva limitou postupnosti $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$, ak v ľubovoľnom okolí čísla a ležia skoro všetky členy tejto postupnosti. Píšeme $\lim_{n\to\infty} a_n = a$.

Na výpočet limity danej postupnosti použijeme buď tlačidlo lim z panela nástrojov alebo príkaz **Výpočet>Limita** a klikneme na **Zjednodušiť**.

V tomto dialógovom okne je hodnota v políčku Výpočet limity - Limita v bode, štandardne nastavená na nulu. Je to jediný parameter, ktorý nesmieme zabudnúť zmeniť. Toto dialógové okno vidíme na Obrázku 45.



Obrázok 45 Dialógové okno Výpočet limity

Postupnosti možno zobraziť aj graficky tým istým tlačidlom v okne Grafika – 2D ako pri zobrazení grafov funkcií.

8 KOMBINATORIKA

Program Derive môžeme využiť aj pri počítaní úloh z kombinatoriky čo oceníme najmä pri počítaní s veľkými číslami. Program má zadefinované funkcie PERM (m,n), ktorá počíta variácie n-tej triedy z m prvkov, PERM(n,n) = n!, COMB(m,n), ktorá počíta kombinácie n-tej triedy z m prvkov.

Úloha 8.1: Riešte rovnicu: $\frac{(n-1)!}{(n-3)!}-\frac{n!}{(n-1)!}=79$.

Riešenie:

Ako pri riešení rovníc máme na výber dve možnosti. Buď môžeme dať ***Riešiť< Výraz*** a okamžite dostať výsledok, alebo môžeme rovnicu postupne upravovať. Uvedieme oba spôsoby.

a) okamžitý výpočet

#1: $\frac{(n - 1)!}{(n - 3)!} - \frac{n!}{(n - 1)!} = 79$

#2: $\mathrm{SOLVE}\left(\frac{(n - 1)!}{(n - 3)!} - \frac{n!}{(n - 1)!} = 79, n, \mathrm{Real}\right)$

#3: $n = 11 \vee n = -7$

Obrázok 46 Okamžitý výpočet koreňa rovnice

b) postupný výpočet

Najprv rovnicu zapíšeme do príkazového riadka použijeme tlačidlo „Zjednodušiť“ resp. „Zadať a zjednodušiť“. Pričítaním čísla –79 k obom stranám rovnice a túto rovnicu riešime podľa podkapitoly 3.1.1. Postup riešenia v Derive je znázornený aj na Obrázku 47.

#1: $\frac{(n - 1)!}{(n - 3)!} - \frac{n!}{(n - 1)!} = 79$

#2: $n^2 - 4\cdot n + 2 = 79$

#3: $n^2 - 4\cdot n - 77 = 0$

#4: $\mathrm{SOLVE}(n^2 - 4\cdot n - 77 = 0, n, \mathrm{Real})$

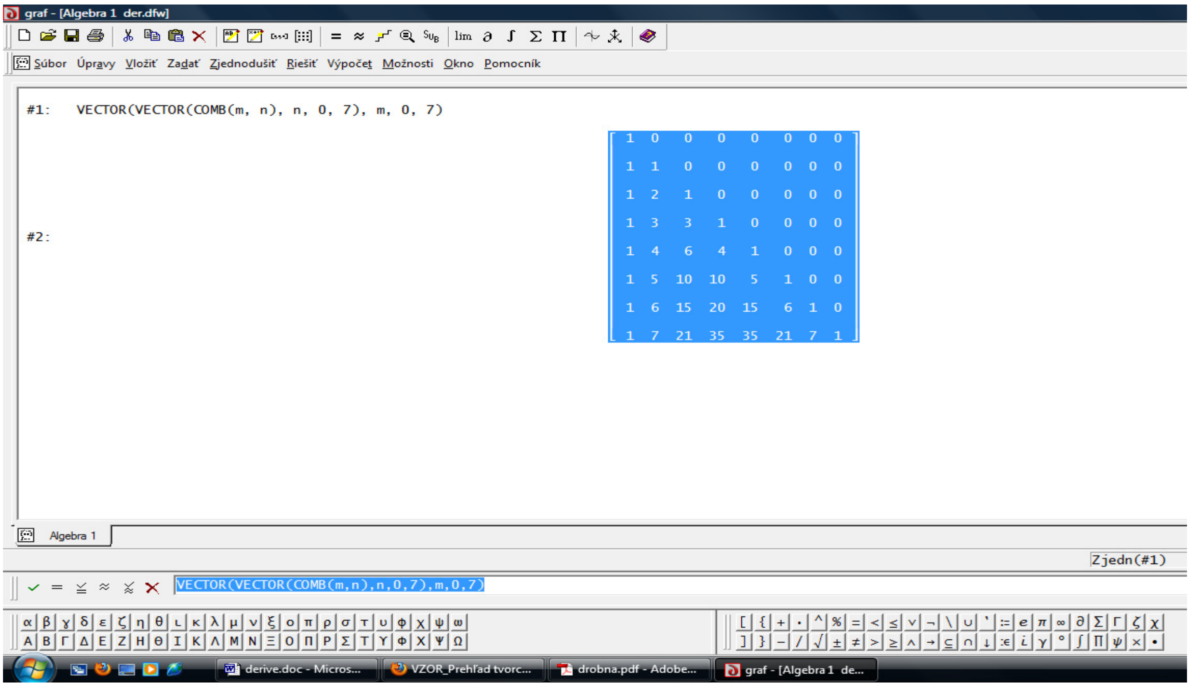
#5: $n = 11 \vee n = -7$

Obrázok 47 Výpočet koreňa rovnice postupným riešením

Treba ale doplniť, že riešením uvedenej rovnice je len n=11, nakoľko –7 nepatrí do definičného oboru rovnice. Ak by sme v skúške riešenia za n dosadzovali –7 dostali by sme faktoriál čísla –8 resp faktoriál čísla –10 a faktoriál záporného čísla nie je definovaný!

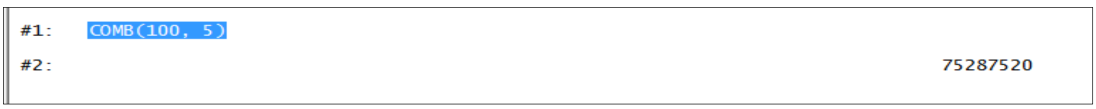
8.1 Kombinácie

Úloha 8.2: Zobrazte prvých 7 riadkov z Pascalovho trojuholníka.
Riešenie:
Využijeme funkcie VECTOR a COMB. Do príkazového riadku napíšeme VECTOR(VECTOR(COMB(m,n),n,0,7),m,0,7) a dáme zjednodušiť.



Obrázok 48 Výsledok riešenia úlohy 8.2

Úloha 8.3: Koľko rôznych pätíc možno vytvoriť zo sto čísel, ak sa čísla v päticiach nesmú opakovať?
Riešenie:
Keďže na poradí v päticiach nezáleží a čísla sa nesmú opakovať, počítame kombinácie 5. triedy zo 100 prvkov bez opakovania. Stačí použiť funkciu COMB.



Obrázok 49 Výsledok riešenia úlohy 8.3
Zo sto čísel možno vytvoriť 75 287 520 pätíc, pričom čísla v päticiach sa neopakujú.

8.2 Permutácie

Úloha 8.4: Koľko rôznych sedemciferných čísel možno vytvoriť z číslic 1,2,3,4,5,6,7, ak sa žiadna číslica neopakuje?
Riešenie:
Pretože sa číslice nesmú opakovať, vytvárame permutácie zo siedmich prvkov bez opakovania. Použijeme funkciu PERM (n,n), ktorá v podstate počíta faktoriál čísla n.

Obrázok 50 Výsledok riešenia úlohy 8.4

Môžeme vytvoriť 5040 sedemciferných čísel.

8.3 Variácie

Úloha 8.5: Koľko je možností vyplnenia tiketu s 15 hrami a troma možnosťami voľby (výhra, prehra, remíza)?

Riešenie:

Budeme tvoriť pätnástice z troch prvkov, čiže variácie s opakovaním. Používame vzorec $V_k'(n) = n^k$.

Obrázok 51 Výsledok riešenia úlohy 8.5

Tiket možno vyplniť 14 348 907 spôsobmi.

Úloha 8.6: Koľkými spôsobmi môže 36 členov organizácie zvoliť štvorčlenný výbor (predseda, podpredseda, referent, zdravotník?

Riešenie:

Pretože záleží na poradí v akom budú volení (prvý bude predseda, druhý podpredseda,...) možností je toľko, koľko je variácií 4. triedy z 36 prvkov. V Derive použijeme funkciu PERM.

Obrázok 52 Výsledok riešenia úlohy 8.6

Členovia môžu voliť 1 413 720 spôsobmi.

9 DERIVÁCIE

Deriváciu výrazu alebo funkcie dostaneme použitím príkazu ***Výpočet⊲Derivácia***, alebo použitím ikony ∂, alebo ju hneď zapíšeme v tvare *DIF (v,n,x)* kde *v* je výraz, alebo funkcia, *x* je premenná a *n* je stupeň derivácie. Ak chceme s deriváciou ďalej pracovať ako s funkciou, môžeme ju zapísať pomocou apostrofu, ale iba v tom prípade, ak už máme funkciu definovanú. Napríklad druhú deriváciu funkcie $f(x)=4x^2$ zapíšeme $f''(x)$, ale zápis $(4x^2)''$ nemá zmysel.

Úloha 9.1: Určte prvú a druhú deriváciu funkcie *f: y = sin(5x+3).*
Riešenie:
Zapíšeme funkciu a odošleme klávesom enter na pracovnú plochu. Pomocou príkazu ***Výpočet⊲Derivácia*** vypočítame najprv prvú a rovnakým spôsobom aj druhú deriváciu.

#1: $\mathrm{SIN}(5\cdot x + 3)$

#2: $\frac{d}{dx}\mathrm{SIN}(5\cdot x + 3)$

#3: $5\cdot \mathrm{COS}(5\cdot x + 3)$

#4: $\left(\frac{d}{dx}\right)^2 \mathrm{SIN}(5\cdot x + 3)$

#5: $-25\cdot \mathrm{SIN}(5\cdot x + 3)$

Obrázok 53 Výpočet derivácie funkcie

9.1 Priebeh funkcie

Úloha 9.2: Určte intervaly monotónnosti, lokálne maximum a minimum a zobrazte graf funkcie $f : y = \dfrac{2x^2}{x^4+1}$

Riešenie:
Zapíšeme funkciu, odošleme na pracovnú plochu a dáme vykresliť graf. Vypočítame prvú deriváciu (#3) a položíme ju rovnú nule, čím dostávame stacionárne body x_1, x_2, x_3. Ak chceme zistiť, kde je funkcia rastúca, položíme prvú deriváciu >0. Ak chceme zistiť kde klesá položíme prvú deriváciu <0 a dáme riešiť výraz. Pre ilustráciu môžeme dať výsledok vykresliť do grafu. Vypočítame druhú deriváciu funkcie. Dosadíme korene rovnice $f'(x)=0$ do $f''(x)$. Ak nám vyjde $f''(x)<0$, funkcia má v danom bode lokálne maximum, ak $f''(x)>0$, funkcia má v danom bode lokálne minimum.

#1: $\dfrac{2\cdot x^2}{x^4 + 1}$

#2: $\dfrac{d}{dx}\dfrac{2\cdot x^2}{x^4 + 1}$

#3: $\dfrac{4\cdot x\cdot(1 - x^4)}{(x^4 + 1)^2}$

Obrázok 54 Výpočet prvej a druhej derivácie funkcie

$$\#4: \quad \frac{4\cdot x\cdot(1 - x^4)}{(x^4 + 1)^2} = 0$$

$$\left[\frac{4\cdot x\cdot(1 - x^4)}{(x^4 + 1)^2} \right]$$

$\#6:$ $x = \pm\infty \vee x = -1 \vee x = 1 \vee x = 0$...stacionárne body

$$\#7: \quad \frac{4\cdot x\cdot(1 - x^4)}{(x^4 + 1)^2} > 0$$

$$\#8: \quad \mathrm{SOLVE}\left(\frac{4\cdot x\cdot(1 - x^4)}{(x^4 + 1)^2} > 0,\ x,\ \mathrm{Real} \right)$$

$\#9:$ $x < -1 \vee 0 < x < 1$...čiže funkcia je rastúca na intervale $(-\infty,-1) \cup (0,1)$.

$$\#10: \quad \frac{4\cdot x\cdot(1 - x^4)}{(x^4 + 1)^2} < 0$$

$$\#11: \quad \mathrm{SOLVE}\left(\frac{4\cdot x\cdot(1 - x^4)}{(x^4 + 1)^2} < 0,\ x,\ \mathrm{Real} \right)$$

$\#12:$ $-1 < x < 0 \vee x > 1$...funkcia je klesajúca na intervale $(-1,0) \cup (1,\infty)$

$$\#13: \quad \left(\frac{d}{dx}\right)^2 \frac{2\cdot x^2}{x^4 + 1}$$

$$\#14: \quad \frac{4\cdot(3\cdot x^8 - 12\cdot x^4 + 1)}{(x^4 + 1)^3}$$

$$\#15: \quad \frac{4\cdot(3\cdot 1^8 - 12\cdot 1^4 + 1)}{(1^4 + 1)^3} = -4$$

Vyšlo nám, že f´´(1) < 0, čiže tu má funkcia lokálne maximum.

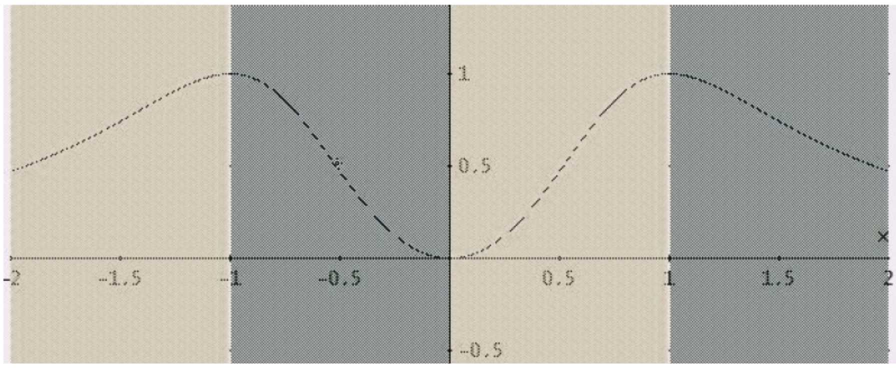
$$\#16: \quad \frac{4\cdot(3\cdot 0^8 - 12\cdot 0^4 + 1)}{(0 + 1)^3} = 4$$

f´´(0) >0, tu má funkcia lokálne minimum.

$$\#17: \quad \frac{4\cdot(3\cdot(-1)^8 - 12\cdot(-1)^4 + 1)}{((-1)^4 + 1)^3} = -4$$

Tu má funkcia lokálne maximum.

Obrázok 55 Monotónnosť a extrémy v Derive



Obrázok 56 Graf funkcie k úlohe 9.2

10 INTEGRÁLY

Pre výpočet integrálu použijeme buď príkaz ***Výpočet◁Integrál***, funkciu INT, alebo tlačidlo ∫. Program Derive však obsahuje oveľa viac funkcií, ako napríklad výpočet integrálu konkrétnou metódou. Program dokáže vypočítať i objem, respektíve obsah plochy rotačných telies.

10.1 Neurčitý integrál

Pri počítaní neurčitého integrálu môžeme využiť režim Zobraziť kroky, aby sme mohli sledovať ako program upravuje.

Úloha 10.1: Vypočítajte $\int \frac{(x+3)^3}{x}$ a svoje riešenie skontrolujte v programe Derive.

Riešenie:

Zadáme výraz ktorý chceme integrovať a odošleme ho enterom na pracovnú plochu. Cez príkaz *Výpočet* → *Integrál* dáme výraz integrovať. Ak chceme vidieť akým spôsobom program výraz upravuje, môžeme dať zobraziť kroky.

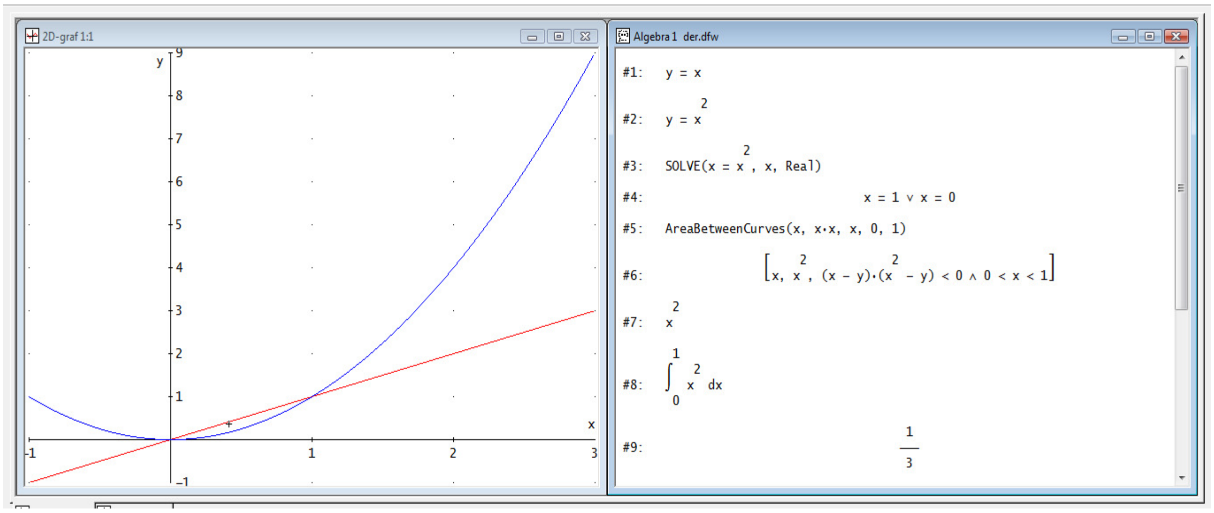
Obrázok 57 Výpočet neurčitého integrálu

10.2 Určitý integrál

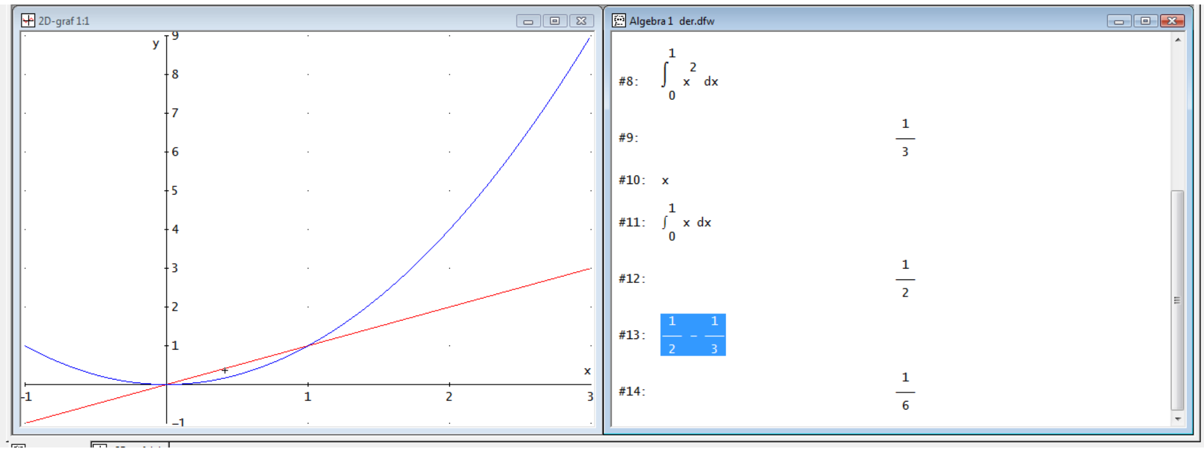
Úloha 10.2: Vypočítajte obsah obrazca ohraničeného grafmi funkcií y = x, y = x^2a zobrazte ho.

Riešenie:

Zapíšeme obe funkcie a dáme ich vykresliť. Pomocou funkcie SOLVE vypočítame ich priesečníky. Na zobrazenie plochy ohraničenej danými funkciami použijeme funkciu AREABETWEENCURVES(f(x), g(x), x, a, b), kde f(x), g(x) sú funkcie, *x* je premenná, a *a, b* sú intervaly pre premennú *x*. Túto funkciu dáme zjednodušiť a vykresliť. Vypočítame určité integrály jednotlivých funkcií s horným ohraničením 1 a dolným ohraničením 0. Odpočítame hodnoty a dostávame výsledok.



Obrázok 58 Výpočet obsahu plochy ohraničenej grafmi dvoch funkcií (1. časť)



Obrázok 59 Výpočet obsahu plochy ohraničenej grafmi dvoch funkcií (1. časť)

11 ZÁVER Z VYUČOVANIA MATEMATIKY POMOCOU DERIVE

S programom Derive sme začali pracovať na škole po autorkinom absolvovaní spomínaného školenia v úvode. Pretože sme na škole v tomto čase mali len jednu učebňu s počítačmi na výuku predmetu Informatika, nebolo možné začať so zapracovaním Derive do riadneho dopoludňajšieho vyučovania na hodinách matematiky. A tak sme Derive používali len na záujmovom krúžku v poobedňajších hodinách, kedy bol možný prístup k počítačom. Program Derive sme dostali na školu z Infoveku.

Žiaci radi pracujú s počítačmi a preto, keď autorka propagovala krúžok matematiky s využitím počítačového programu, pod názvom Derive v matematike, prihlásilo sa 18 žiakov 3. ročníka a počítačov sme v učebni Informatiky mali len 13. Niekedy sa stalo, že pri jednom počítači pracovali aj dvaja žiaci.

Na prvých dvoch hodinách sme oboznámili žiakov s prostredím programu a potom každej uvedenej podkapitole sme sa venovali 2 – 3 hodiny, podľa toho, koľko žiaci na prácu potrebovali. Okrem uvedených vzorových úloh v tejto práci sme so žiakmi riešili klasické úlohy z učebnice, resp. zbierok.

Žiaci na krúžok chodili radi a pýtali sa, či by sme nemohli Derive používať aj na „normálnych“ hodinách matematiky. O dva roky neskôr sme na škole zriadili ešte jednu počítačovú učebňu a mohli sme už vyučovať matematiku pomocou programu Derive aj na delených hodinách matematiky.

Žiaci zadané úlohy najprv riešili v zošite a výsledky si kontrolovali výpočtami pomocou Derive. Je to pre nich zaujímavejšie, aj keď slabší žiaci majú s tým niekedy problém. Jednoznačne nie sme zástancami riešenia úloh len pomocou Derive. Derive slúži na kontrolu výsledkov, alebo ho môžeme použiť pre rýchle získanie výsledku. Dôležité je, aby žiaci vedeli najprv úlohu riešiť v zošite, až potom na riešenie úloh tohto typu môžu použiť Derive.

Výhody vyučovania s Derive: rýchle vyriešenie úlohy, budovanie medzipredmetových vzťahov, spestrenie vyučovacej hodiny, vzrast záujmu o matematiku, vizualizácia riešenia.

Nevýhody vyučovania matematiky s Derive: nepriehľadnosť postupu riešenia, potlačanie logiky. Ak by sme matematiku vyučovali len s Derive, žiaci by sa nenaučili riešiť úlohy postupne, logicky. Preto odporúčame Derive používať na matematike až vtedy, ak žiaci zvládnu preberané učivo.

ZÁVER

Posledné roky sa veľmi často hovorí o zavádzaní inovatívnych metód do vyučovania, používaní informačno - komunikačných technológií a podobne. Jednoducho ide o to, urobiť vyučovanie v škole zaujímavejším, pútavejším. V školách ustupuje memorovanie, učitelia sa snažia naučiť žiaka hľadať si potrebné poznatky. Veľmi často sa hovorí o motivácii žiakov.

Možno by si niekto povedal, ale ako motivovať na matematike. Postoj žiakov k predmetu matematika nie je veľmi pozitívny. Často sa stretávame s otázkou žiakov, načo im to – ktoré učivo z matematiky bude. Zvyknú vyhlásiť, že oni matematiku študovať ďalej nepôjdu.

Je dobré a pre žiakov motivujúce k učeniu, ak učiteľ vie ukázať príklady použitia získaných poznatkov v bežnom živote. Za nevyhnutnosť považujeme, aby postupné zavádzanie informačných technológií preniklo do vyučovania a to nielen matematiky, ale nutne ovplyvnilo obsah a metódy vyučovania všetkých predmetov.

Napriek preukázateľným výhodám počítačom podporovaného vzdelávania, hlavným nenahraditeľným prvkom vyučovacieho procesu je, a vždy bude učiteľ. Len od neho však závisí, aký postoj k novým technológiám žiak nadobudne.

Veríme, že táto práca bude slúžiť ako návod, či motivácia pre učiteľov, ktorí sa rozhodnú pre využívanie matematických softvérových systémov, alebo dokonca konkrétne programu Derive vo vyučovaní matematiky, alebo pre žiakov, ako pomôcka pri ich samostatnom štúdiu.

ZOZNAM BIBLIOGRAFICKÝCH ZDROJOV

1. Gabková, J., Omachelová, M. 2008. Derive 6 ako na to. STU, Bratislava. 2008 ISBN: 80-969562-3-X
2. Gabková, J., Omachelová, M. 2006. Derive 6 pre stredoškolských učiteľov. STU, Bratislava. 2006 ISBN: 80-967305-3-3
3. Kutzler, B., Kokol-Voljc, V. 2003. Úvod do Derive 6. 1. vydanie. OEG, Rakúsko. 2003
4. Kutzler, B., Kokol-Voljc, V. 2003. Derive 6. Matematika na počítači pre pokročilých. Referenčná príručka. OEG, Rakúsko. Preklad: NEPA Slovakia, spol. s r.o. Bratislava. 2003

Zdroje obrázkov: súkromný archív autora