Moderné vzdelávanie pre vedomostnú spoločnosť / Projekt je spolufinancovaný zo zdrojov EÚ

Anton Somorčík

Paradoxy a provokácie vo vyučovaní matematiky

Osvedčená pedagogická skúsenosť edukačnej praxe

Bratislava
2012

Vydavateľ:	Metodicko-pedagogické centrum, Ševčenkova 11, 850 01 Bratislava
Autor OPS:	Anton Somorčík
Kontakt na autora:	Základná škola Močenok, Školská 1158, 951 31 Močenok e-mail: asomorcik@gmail.com
Názov OPS:	Paradoxy a provokácie vo vyučovaní matematiky
Rok vytvorenia OPS:	2012
Odborné stanovisko vypracoval:	

Táto osvedčená pedagogická skúsenosť edukačnej praxe/osvedčená skúsenosť odbornej praxe bola vytvorená z prostriedkov projektu Profesijný a kariérový rast pedagogických zamestnancov. Projekt je financovaný zo zdrojov Európskej únie.

Kľúčové slová

neštandardné, paradoxné riešenia úloh, neformálnosť poznávania, rozbíjanie tradičných návykov, motivácia žiakov

Anotácia

Súbor 54 netradičných úloh z matematiky. Motivačné vyriešené príklady, doplnené metodickými resp. historickými poznámkami, sú určené učiteľom matematiky na 2. stupni ZŠ a osemročných gymnáziách.

Poďakovania

Ďakujem doc. RNDr. Petrovi Vrábelovi, CSc. z Katedry matematiky UKF v Nitre za posúdenie textu pred jeho konečnou verziou. Vďaka jeho pripomienkam som mohol odstrániť viaceré formálne i vecné nedostatky.

Srdečne ďakujem aj RNDr. Viere Kolbaskej, bývalej pracovníčke MPC Bratislava, za metodické pripomienky a podnety, na základe ktorých som sa rozhodol touto formou prezentovať svoje pedagogické skúsenosti.

Obsah

Motto:

„Predmet matematika je tak vážny, že by sa nemalo zabúdať na žiadnu príležitosť, ako ho urobiť trochu zaujímavým."

B. Pascal (1632–1662)

Úvod

Kto čítal poviedku kanadského humoristu S. Leacocka: „A, B a C aneb matematika z lidské stránky" musí si povedať: tak toto je tá matematika, a preto ju ľudia nemusia!

Neobľúbenosť matematiky zrejme nespočíva len v tom, že k nej „nevedie cesta kráľovská". Svoj podiel viny na tom máme aj my, učitelia – tzv. rigidný učiteľ je pre matematiku možno väčším nebezpečenstvom, než nová školská reforma.

Métou učiteľa by v každom prípade malo byť nielen naučiť, ale aj vytvoriť vzťah k naučenému. Ponúkam jeden zo spôsobov, ako sa k tejto méte priblížiť – zbierku príkladov, ktorých výsledky sú z množiny „para doxan" - proti očakávaniu. Domnievam sa, že spolu s historickými, popularizačnými či životopisnými poznámkami je to matematika naozaj „z ľudskej stránky". O úspešnosti takejto prezentácie predmetu svedčí záujem mojich žiakov o matematiku, resp. fyziku. V posledných rokoch, keď prijímacie skúšky na stredné školy prakticky vystriedal nábor, a keď deviataci nijako zvlášť nepotrebovali „body" na prihlášku, nemala naša škola nikdy núdzu o súťažiacich v MO, FO, Pikomate či Pikofyze. Výsledky, ktoré dosiahli moji žiaci (niektoré uvádzam v Prílohe) majú svoj pôvod do značnej miery v tom, že ich predmet matematika ani nenudil ani nestrašil, naopak, že prostredníctvom riešenia zábavných a problémových úloh zacítili (možno prvýkrát v živote) krásu poznávania.

Súčasné diskusie o tom, ako u nás „zmatematizovať" vzdelávanie, aby sa SR nestala krajinou vzdelaných politológov, mediálnych komunikátorov a iných nepoužiteľných magistrov, nutne smerujú aj k tomu, ako tú „prírodovedu" spopularizovať. Táto zbierka príkladov má ambície nepatrným dielom prispieť k tomuto cieľu.

Anton Somorčík

Opis OPS

Materiál zbierky som zhromažďoval ako súčasť prázdninových „samoštúdií“ vo forme výpiskov z popularizačnej literatúry, z odborných, najmä českých časopisov. Úspešne som ho využíval ako:

- podklady pre vedenie matematického krúžku
- spestrenie hodín matematiky
- podpora talentovaných žiakov
- námety na projekty z fyziky

V štandartných učebniciach absentovali takéto typy príkladov. Zbierka obsahuje veľa pravdepodobnostných paradoxov, čo zohľadňuje čoraz širšie zastúpenie tejto modernej časti matematiky v učive i bežnom živote.

Metodológia používania zbierky je veľmi rozmanitá – tak ako rozmanité a nevyspytateľné sú činitele, tvoriace vyučovací proces. Užívateľ ľahko zistí, že pri niektorých náročnejších úlohách sa nevyhne tzv. transmisii. Konečný efekt, šokujúci, či prinajmenšom prekvapivý výsledok, však zrejme splní svoj účel – nenechá žiaka ľahostajným, núti ho nad vecou premýšľať, spoluvytvára vzťah k predmetu matematika.

Cieľom OPS je dať učiteľom k dispozícii databázu netradičných úloh, ktoré by prispeli k tomu, aby sa u žiakov vytvoril trvalo pozitívny vzťah k matematike.

1. Magické číslo 1089

Vyzveme žiakov, aby napísali nejaké 3-ciferné číslo (každý iné), pričom na mieste stoviek nech je číslica aspoň o 2 väčšia, než na mieste jednotiek. Potom nech ho napíšu v „prevrátenom" tvare (t.j. s opačným poradím číslic) a odčítajú menšie od väčšieho.

Napríklad: $623-326=297$.

Teraz súčet sčítame s „prevráteným" tvarom: $297+792=1089$. Ak správne počítali, všetkým by malo vyjsť rovnaké číslo: 1089!

Riešenie: $100a+10b+c-100c-10b-a=99a-99c=99(a-c)$. Dostali sme zrejme 3-ciferný násobok čísla 99. Takých násobkov nie je veľa: 198, 297, 396, 495, 594, 693, 792, 891. Keď k hociktorému z týchto čísel pričítame číslo s opačným poradím číslic, dostaneme:

900 (sčítané stovky) + 180 (sčítané desiatky) + 9 (sčítané jednotky) = 1089.

Alebo všeobecne: nech a, b, c sú číslice pôvodného čísla. Potom z tvaru $99(a-c)$ vhodnými úpravami dostaneme

$$\begin{aligned}99(a-c)&=100(a-c)-(a-c)=\\&=100(a-c)-100+100-10+10-a+c=\\&=100(a-c-1)+9\cdot 10+(10-a+c).\end{aligned}$$

Keďže $a\geq c+2$, tak zrejme

$(a-c-1)$ je číslica na mieste stoviek,
9 je číslica na mieste desiatok,
$(10-a+c)$ je číslica na mieste jednotiek.

Vykonáme posledný súčet podľa pokynov v zadaní:

$100(a-c-1)+9\cdot 10+(10-a+c)+100(10-a+c)+9\cdot 10+(a-c-1)=100\cdot 9+180+9=1089.$

Postup sa dá „zdramatizovať":

a) číslo 6801 napíšeme digitálnymi číslicami na papier a keď sa žiaci začnú vytešovať, že akurát učiteľovi „nevyšlo", papier otočíme.

b) zapamätáme si (a „uhádneme") deviate slovo na 10-tej strane v ôsmom riadku učebnice XY.

2. Násobenie dvoch deväťciferných čísel spamäti(!)

Prvé číslo napíše na tabuľu učiteľ, aby ukázal, „ako také číslo má vyzerať – napríklad 142 857 143". Druhé nadiktujú žiaci. Výsledok násobenia – 17-ciferný súčin – napíše spamäti, dokonca odpredu!

Riešenie: 10 000 000 001/7 = 142 857 143. Ak túto rovnosť vynásobíme číslom, ktoré nám nadiktovali žiaci, napr. 245 739 547, dostaneme:

245 739 547 245 739 547 / 7 = 142 857 143 . 245 739 547.

Stačí si teda číslo, ktoré si zvolili žiaci, predstaviť napísané 2-krát za sebou a spamäti ho deliť siedmimi. Súčin sa pravdaže <u>musí</u> písať odpredu.

Autor tento trik roky úspešne predvádzal svojim žiakom, presviedčajúc ich (avšak márne) o svojich zázračných počtárskych schopnostiach, až sa napokon našiel ôsmak (neskôr reprezentant Slovenska na MMO), ktorý odhalil tajomstvo v priebehu niekoľkých minút.

3. Hádanie prečiarknutej číslice

Nech žiaci napíšu dve alebo viac čísel s rovnakým počtom číslic (s výnimkou nuly a deviatky). Učiteľ pripíše rovnaký počet čísel, viac na tabuľu nepozerá a požiada, aby niekto preškrtol jednu číslicu a vypočítal súčet. Keď mu žiaci prezradia ciferný súčet súčtu, uhádne prečiarknutú číslicu.

Riešenie: ukážeme najprv na príklade:

žiak	245
žiak	328
učiteľ	~~7~~54
učiteľ	671
súčet	1 298

Učiteľ dopĺňa čísla tak, aby dvojice číslic v jednotlivých rádoch dávali ciferný súčet 9. Takýto súčet musí byť vždy deliteľný deviatimi (a pri štyroch sčítancoch je vždy $2 \cdot 999 = 1998$). Rozdiel medzi ciferným súčtom a najbližším vyšším násobkom deviatich je hľadaná číslica.

Dôvody nie sú zložité. Totiž súčet takto zvolených $2n$ sčítancov je vždy $999n$. Preto ak žiaci vyškrtnú číslicu x

a) na mieste jednotiek, tak nový súčet bude $999n - x$,

b) na mieste desiatok, tak nový súčet bude $999n - 10x$,

c) na mieste stoviek, tak nový súčet bude $999n - 100x$.

V prípade a) je zrejmé, že nový súčet je o x menší než nasledujúci násobok čísla 9, t.j. číslo $999n$. V prípade b) je $999n - 10x = (999n - 9x) - x$, a teda nový súčet je opäť o x menší ako nasledujúci násobok 9. Obdobne v prípade c): $999n - 10x = (999n - 9x) - x$. Napokon si treba uvedomiť, že ľubovolné prirodzené číslo (napr. s číselným zápisom $a_m a_{m-1} \ldots a_2 a_1 a_0$) dá po delení číslom 9 rovnaký zvyšok ako jeho ciferný súčet, lebo

$$a_0 + 10a_1 + 100a_2 + \cdots + 10^n a_n = \underbrace{(a_0 + a_1 + \cdots + a_n)}_{\text{ciferný súčet}} + \underbrace{9a_1 + 99a_2 + \cdots + (10^n - 1)a_n}_{9|}.$$

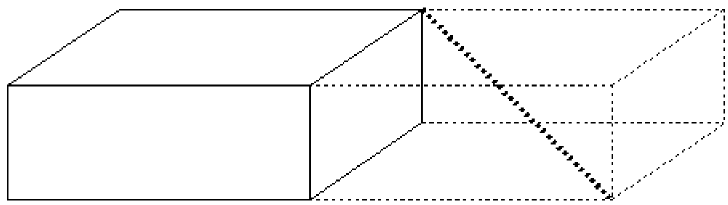
Z toho už vidno, že keď teda novému súčtu chýba po ďalší násobok deviatky hodnota x, tak to isté platí aj pre ciferný súčet nového súčtu.

4. Hádanie počtu zápaliek v zápalkovej krabičke

Nechajte spočítať zápalky v zaplnenej krabičke – výsledok bude dvojciferné číslo. Žiaci nech zrátajú obe cifry a odoberú z krabičky počet zápaliek, zodpovedajúci cifernému súčtu. Po potrasení krabičky so zvyšnými zápalkami <u>presne</u> zistíte, koľko kusov zápaliek je v krabičke.

Riešenie: pôvodný počet zápaliek je $10a + b$. Zostalo $10a + b - (a + b) = 9a$. Viac ako 50 zápaliek do krabičky nevojde, takže ich môže byť 9, 18, 27, 36 alebo 45. Tieto počty sa dajú poľahky zvukovo odlíšiť.

Autor, aby naozaj dosiahol 100% úspešnosť hádania, zakaždým pred týmto experimentom chvíľu trénoval s piatimi krabičkami, v ktorých mal horeuvedené počty. Keď už je krabička zápaliek na stole: dá sa <u>iba</u> meraním a bez toho že by sme ju otvorili, zistiť dĺžka telesovej uhlopriečky? Riešenie je na obrázku:



5. Čo robí pán Kováč?

Manželka pána Kováča je o 21 rokov staršia než jej syn. Za šesť rokov bude 5-krát staršia. Čo robí pán Kováč?

Riešenie: syn má............ x rokov
matka má......... $x+27$ rokov
o 6 rokov:

$$5(x+6)=x+27$$
$$x=-\frac{3}{4}$$

Použijeme pedagogickú zásadu č. 508: „Vyriešený príklad necháme v triede niekoľko minút doznievať, pretože prevažná časť žiakov vôbec nevie, čo sme to vlastne vypočítali” (-¾ roka...)

6. Násobenie ruského nevoľníka

Ako násobiť ľubovolne veľké čísla, ak vieme čísla iba sčitovať, pričom násobiť a deliť vieme iba dvomi (napríklad $41 \cdot 62$)?

Riešenie: Čísla napíšeme do dvoch stĺpcov. V 1. stĺpci budeme deliť dvomi (bez zvyšku, celočíselne), pokiaľ nedostaneme číslo 1. Číslo v 2. stĺpci budeme súčasne násobiť dvomi. Výsledky píšeme vedľa seba. Nakoniec sčítame tie čísla v 2. stĺpci pri ktorých je v 1. stĺpci nepárne číslo:

Delené dvomi	Násobené dvomi
41	62
20	124
10	248
5	496
2	992
1	1 984

$41 \cdot 62 = 62 + 496 + 1\ 984 = 2\ 542.$

Podobne násobili i starí Egypťania, ibaže k číslu násobenému dvojkou pripisovali, o aký násobok pôvodného čísla (62) sa jedná; v našom prípade:

62	1
124	2
248	4
496	8
992	16
1 984	32

Potom druhé číslo (41) rozpísali pomocou príslušných násobkov (32, 16, 8, 4, 2, 1), pričom začínali od najväčšieho:

$$41 = 32 + 8 + 1.$$

Výsledok sa $41 \cdot 62$ sa nakoniec dostane tak, že sa spočíta 32-násobok, 8-násobok a 1-násobok čísla 62.

Napísať číslo ako súčet mocnín dvojky vlastne znamená prepísať ho do dvojkovej sústavy. V algoritme ruského nevoľníka je tento proces jednoduchší – stačí nepárne čísla označiť jednotkou a párne nulou.

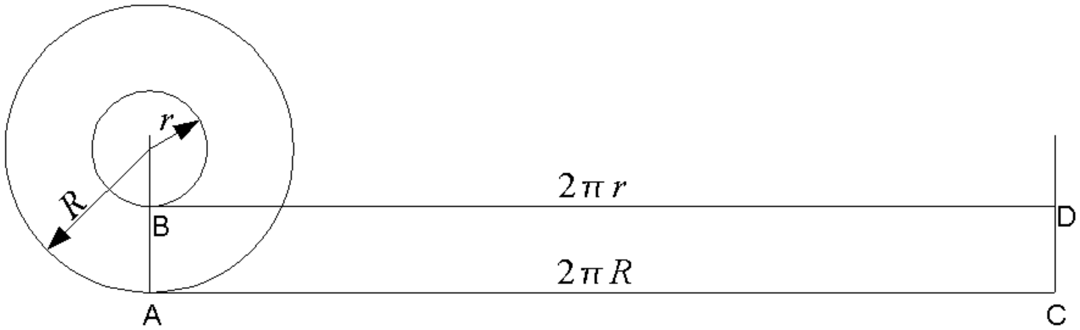
Delené dvomi	Zvyšok po delení
41	1
20	0
10	0
5	1
2	0
1	1

$$41_{10} = 101001_2.$$

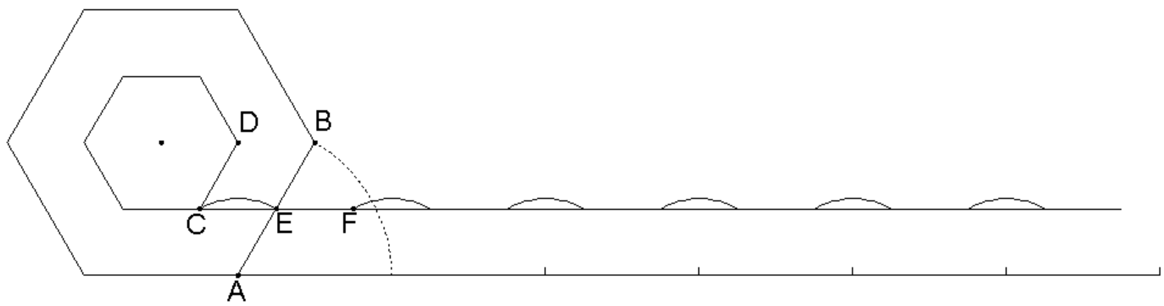
„Račite orať?" – spýtali sa veľkého ruského spisovateľa L. N. Tolstého (1828–1910) nevoľníci pri jednom z jeho filantropických pokusov.

7. Rota Aristotelis – Aristotelovo koleso

Ide o starovekú geometrickú záhadu, ktorú správne rozlúštil až Galileo Galilei (1564–1642). Dva kruhy pevne spojené majú polomery $r \leq R$. Po jednej otáčke sa bod A dostane do bodu C a bod B do bodu D. Z obrázka vidno: $2\pi r = 2\pi R \;\rightarrow\; r = R$???



Riešenie: je možné ukázať na štvorci, pravidelnom 6-uholníku, 8-uholníku ... n-uholníku. Galileovo riešenie je zrejmé z obrázku:



Bod D neprešiel do E, ale do F → vrcholy malého 6-uholníka sa okrem otáčania aj posúvajú. Úvaha platí pre akýkoľvek n-uholník, v medznom prípade aj pre kruh.

„E pur si muevo!” (A predsa sa točí!), výrok pripisovaný Galileovi, bol podľa P. Beckmanna (viď použitú literatúru) posledným výkrikom Giordana Bruna (1548–1600) na hranici 16. 2. 1600.

8. Ako sa dá pomocou čísla domu zistiť vek jeho obyvateľa?

Vynásob číslo domu, v ktorom bývaš, štyrmi, k súčinu pripočítaj 7, získané číslo vynásob 25. K súčinu pripočítaj svoj vek a číslo 125. Povedz mi výsledok, ja ti poviem číslo domu a koľko máš rokov.

Riešenie: 1) číslo domu = x, vek = y
2) $4x+7$
3) $(4x+7)\cdot 25=100x+175$
4) $100x+175$
5) $100x+175+y+125=100x+y+300$

Od výsledku odrátame 300. Dve cifry sprava značia vek, ostatné cifry (stojace vľavo) číslo domu.

9. ...a ak je obyvateľov viac?

„Koľko ľudí býva v tomto dome?”
„Traja.”
„Ako sú starí?”
„Súčin ich vekov je 225, súčet ich vekov je rovný číslu domu.”
Sčítací komisár sa pozrel na číslo domu a hovorí: „To mi stačí. Vy ste najstarší?”
„Áno,” znela odpoveď.

Riešenie: hľadáme tri čísla, ktorých súčin je 225, súčet je známe číslo a predsa nasledovala otázka, či je jeden z obyvateľov najstarší. Vzhľadom na súčin existujú dve riešenia: 25; 3; 3 a 15; 15; 1. Obe dávajú aj rovnaký súčet, druhé riešenie však nevyhovuje.

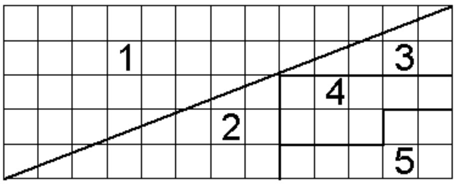
10. Kapitán Poseidon

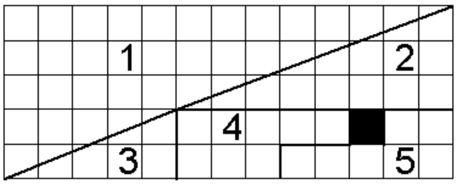
Ak vynásobíme jeho vek dĺžkou lode v metroch a počtom jeho detí, dostaneme číslo 16 059. Koľko rokov má kapitán?

Riešenie: $16\ 059 = 3 \cdot 101 \cdot 53$.

161 rokov potom, čo Daniel Bernoulli (1700–1784) objavil, že $p_{\text{statické}} + p_{\text{dynamické}} = konšt.$, *kapitáni lodí Hawk (vojenský krížnik) a Olympic (výletná loď) kruto doplatili na neznalosť jeho rovnice. Lode plávali rovnobežne vedľa seba vo vzdialenosti asi 100 m, pomerne veľkými rýchlosťami: 33 km/h a 26 km/h. Stalo sa to, čo sa dá demonštrovať tak, že fúkneme medzi dva listy papiera. Napriek snahe kormidelníkov, akási „neviditeľná" sila začala lode priťahovať k sebe, až napokon krížnik Hawk rozpáral bok obrovského Olympicu. Našťastie sa to stalo blízo brehov Veľkej Británie a posádky aj cestujúci prežili túto „nepružnú" zrážku bez ujmy. K slovu prišli fyzici a matematici, ktorí vypočítali, že už pri vzdialenosti 300 m by bol podtlak medzi loďami taký, že by ho žiadny kormidelník nezvládol (kormidelníka z krížnika Hawk prepustili z väzenia a čas, ktorý tam strávil, mu finančne vykompenzovali).*

11. Kde sa stratil štvorček?





Riešenie: Pre tangensy najmenších uhlov v trojuholníkoch 2 a 3 platí: $\operatorname{tg}\alpha_2 = \frac{3}{8} = 0{,}375$ a $\operatorname{tg}\alpha_3 = \frac{2}{5} = 0{,}400$, čiže $\alpha_2 \neq \alpha_3$, a teda trojuholníky 1, 2 a 3 k sebe priliehajú len zdanlivo.

Presnosť je výsadou matematikov. Astronóm, fyzik a matematik trávili spolu dovolenku v Škótsku. Z okna vlaku spozorovali čiernu ovcu uprostred poľa. „Pozoruhodné," hovorí astronóm, „škótske ovce sú čierne". Fyzik namieta: „Tak to nie, len niektoré škótske ovce sú čierne". Matematik si vzdychol a povedal: „Páni, v Škótsku existuje aspoň jedno pole na ktorom sa nachádza aspoň jedna ovca, ktorá je aspoň z jednej strany čierna".

12. Zrýchlené riešenie sústavy rovníc (*tzv.* turbodidaktika – T*Di*)

Riešte sústavu rovníc:

$$\frac{x-2}{y-1} = \frac{3}{5}$$
$$\frac{x-1}{y-2} = 1$$

Riešenie: stačí prvá rovnica:

$$\frac{x-2}{y-1}=\frac{3}{5}$$
$$\frac{x}{y}-\frac{2}{1}=\frac{3}{5}$$
$$\frac{x}{y}=\frac{3}{5}+\frac{2}{1}$$
$$\frac{x}{y}=\frac{3+2}{5+1}$$
$$\frac{x}{y}=\frac{5}{6}$$
$$\downarrow$$
$$x=5$$
$$y=6$$

(Hlavne, že „vyšlo"!)

13. Súčet prvých *n* prirodzených čísel

Riešenie: Súčet napíšeme dvakrát po sebe v opačnom poradí:

$$s_n=1+\ 2\ +\ 3\ +\cdots+(n-2)+(n-1)+n$$
$$s_n=n+(n-1)+(n-2)+\cdots+\ 3\ +\ 2\ +1$$

Sčítame sčítance stojace nad sebou:

$$2s_n=(n+1)+(n+1)+(n+1)+\cdots+(n+1)+(n+1)+(n+1)$$
$$2s_n=n(n+1)$$
$$s_n=\frac{n(n+1)}{2}$$

Vzorec, na ktorý prišiel za chvíľu školáčik Fridrich Gauss (1777–1855), keď učiteľ nariadil triede sčítať čísla od jedna do sto (očakávajúc, že bude mať od žiakov hodnú chvíľu pokoj). Vzorec poskytuje napríklad aj rýchlu odpoveď na otázku, či sa dá zarobiť na tom, ak budeme 200 € predávať tak, že za prvé euro dostaneme jeden cent, za druhé dva centy, za tretie 3 atď. (Súčet je 20 100 centov – zisk 1€).

Pokračujeme v „propedeutike":

14. Súčet prvých *n* párnych čísel

Riešenie: $2+4+6+\cdots+2(n-4)+2(n-2)+2n$.

Vyjmeme pred zátvorku 2:

$$2+4+6+\cdots+2(n-4)+2(n-2)+2n=2[1+2+3+\cdots+(n-4)+(n-2)+n]=$$
$$=2s_n=$$
$$=n(n+1)$$

15. Tri súčty nekonečného radu

Sčítajme nekonečný rad $s=1-1+1-1+1-1+\cdots$.

Riešenie a): $s=(1-1)+(1-1)+(1-1)+\cdots=0$

Riešenie b): Vyjmeme -1 z 2., 3., 4., ... n-tého člena:

$$s=1-(1-1)-(1-1)-(1-1)+\cdots=1.$$

Riešenie c): $s=1-(1-1+1-1+1-1+\cdots)=1-s \ \rightarrow \ 2s=1 \ \rightarrow \ s=\frac{1}{2}.$

Riešenie a+b+c): Súčet zadaného radu v skutočnosti neexistuje. Pre takéto rady potom nemusia platiť jednoduché pravidlá algebry. Dokonca ani komutatívny zákon...

Taliansky kňaz, filozof a matematik, otec Guido Grandi (1671–1742), použil výsledky a) a b) ako dôkaz, že Boh mohol stvoriť vesmír (1) z ničoho (0). Aj G. W. Leibniz, povolaním diplomat, srdcom matematik (spoluzakladateľ infinitezimálneho počtu), spájal vieru v Boha s matematikou. Dvojková sústava napríklad preňho znamenala „creation ex nihilo", čiže stvorenie vesmíru z Boha (číslica 1) a z prázdnoty (číslica 0).

16. Súčet radu len polovičný?

Sčítajme nekonečný rad $1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\frac{1}{5}-\frac{1}{6}+\cdots$ (konverguje k súčtu 0,693).

„Riešenie": Poprehadzujme poradie – za každý kladný člen dajme dva záporné:

$$\left(1-\frac{1}{2}\right)-\frac{1}{4}+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{6}\right)-\frac{1}{8}+\left(\frac{1}{5}-\frac{1}{10}\right)-\frac{1}{12}+\cdots$$

Ani jeden člen sme nevynechali! Vyrátame zátvorky:

$$\frac{1}{2}-\frac{1}{4}+\frac{1}{6}-\frac{1}{8}+\frac{1}{10}-\frac{1}{12}+\cdots$$

Vyjmeme pred zátvorku $\frac{1}{2}$:

$$\frac{1}{2}\cdot\left(1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\frac{1}{6}+\cdots\right).$$

Poprehadzovaním členov sme zmenšili súčet radu na polovicu!

Riešenie: Prehadzovanie členov nekonečného radu nemusí byť beztrestné. Dá sa síce dokázať, že náš pôvodný rad konverguje ku $\ln 2 \approx 0{,}693$, no ak dáme všetkým členom radu znamienko plus (teda sčítame ich absolútne hodnoty), tak výsledok nebude konečné číslo, ale $+\infty$. Tomu sa hovorí, že pôvodný rad nekonverguje absolútne, ale iba neabsolútne. No a pre neabsolútne konvergentné rady platí slávna Riemannova veta, že vhodným poprehadzovaním ich členov možno dostať dokonca akýkoľvek želaný súčet! Ak by bol rad konvergentný absolútne, tak poprehadzovaním členov sa jeho súčet zmeniť nedá.

17. Zisťujeme veľkosť čísla π

– vážením: z kartónu vystrihneme štvorec ktorý má stranu dlhú *a* a kruh s polomerom *a*. Podiel hmotnosti kruhu a hmotnosti štvorca je číslo π.

Riešenie: $\frac{m_{kruh}}{m_{štvorec}}=\frac{V_{kruh}}{V_{štvorec}}=\frac{\pi\cdot\cancel{a^2}\cdot\cancel{h}\cdot\cancel{\rho}}{\cancel{a^2}\cdot\cancel{h}\cdot\cancel{\rho}}=\pi.$

Žiaci sa presvedčili o užitočnosti krátenia zlomkov – krátia radi a oduševnene:

$$\mathrm{tg}\,\alpha = \frac{\mathrm{s\,in}\,\alpha}{\mathrm{co\,s}\,\alpha} = \frac{\mathrm{in}}{\mathrm{co}}.$$

– hádzaním paličky na dlážku – Buffonova hra (gróf G. L. Buffon (1707–1788) – francúzsky prírodovedec; nemýliť si s talianskym futbalovým brankárom G. Buffonom (*1978)):

Riešenie: palička by mala byť približne tak dlhá, aká je vzdialenosť medzi spojmi dosiek. Počet bodov pretínania zrejme nezávisí od tvaru paličky – počítame všetky body pretínania. Nech je vzdialenosť medzi spojmi 12 cm. Zoberme drôt skrútený do kružnice s priemerom 12 cm. Počet bodov pretínania bude určite 2. Pre π-**k**rát kratšiu paličku (dĺžky 12 cm) bude počet pretínaní π-krát menší – bude sa v priemere rovnať $\frac{2}{\pi}$. Pri n pádoch bude $n \cdot \frac{2}{\pi}$ pretínaní.

$$\frac{\text{počet hodov}}{\text{počet pretínaní}} \cdot 2 = \frac{n}{n \cdot \frac{2}{\pi}} \cdot 2 = \pi .$$

V r. 1864 sa americký kapitán O. C. Fox zotavoval zo zranenia, ktoré utrpel v občianskej vojne. „Rehabilitoval" hádzaním ihly na rovnobežky. Pri 1 620 pokusoch získaval výsledky 3,1780; 3,1423 a 3,1416. Počítačové simulácie pri takomto počte hodov vykazujú väčšie chyby...

– memorovaním:

Wie, o dies π
Macht ernstlich so vielen viele Müh!
Lernt immerhin, Jünglinge, leichte Verselein,
Wie so zum Beispiel dies dürfte zu merken sein!

How, I want a drink, alcoholic of course, after the heavy lectures involving quantum mechanics!

Que j´aime a faire apprendre un nombre utile aux sages!
Immortel Archimede, artiste ingénieur...

(Počet písmen v slove reprezentuje príslušnú číslicu čísla π.)

Príslušníci generácie "bí–dží" (before Google) sa memorovaniu nebránia. Podľa výskumov viacerých amerických univerzít, tzv. Google efekt (vyhľadávanie namiesto zapamätania) zmenšuje pamäť užívateľov internetu.

Číslo π *poskytuje ojedinelú príležitosť uplatniť medzipredmetové vzťahy medzi matematikou a náboženskou výchovou – jeho približná hodnota sa objavuje už v Písme Svätom, v Starom Zákone, v 2. Knihe kroník 4.2: „Dal (Šalamún) spraviť liate more, desať lakťov malo od okraja k okraju, bolo dookola okrúhle, päť lakťov vysoké a tridsať lakťový povraz ho objal dookola".*

Hoci je číslo π *iracionálne,„veršovačky" o ňom majú obmedzený rozsah – na 32. mieste je nula. Skúste však zadať do vyhľadávača „pilish" a uvidíte, ako si s tým autori poradili (rekordom v auguste 2011 bol román s 10 000 slovami).*

18. Zradné počítanie s percentami :

Stavba domu:
Treba na ňu 1 000 tehál. Na straty spojené s rozbitím sa počíta 5%. Koľko tehál treba priviezť na stavbu?

„Riešenie": 5% z 1 000 je 50. Na stavbu treba priviezť 1 050 tehál. Priviezli ich. Straty sú päťpercentné: 5% z 1 050 je 52,5. Chýba 2,5 tehly!?!?

1 000 tehál je iba 95%; 5% je nenávratne stratených! Takto chybne vyrátané príklady roky kolujú v zbierkach na prijímacie skúšky z matematiky na stredné školy...

„Historická" úloha:
Žiaci IX.A a IX.B robili prijímacie skúšky na stredné školy. V IX.A bolo 16 chlapcov a 18 dievčat, v IX.B 19 chlapcov a 16 dievčat. Z IX.A urobilo prijímačky 12 chlapcov – <u>75%</u> a 7 dievčat – <u>38,8%</u>, z IX.B 14 chlapcov – <u>73,7%</u> a 6 dievčat – <u>37,5%.</u> ktorá trieda dopadla lepšie?

Riešenie: zdalo by sa že IX.A. Z IX.A však urobilo prijímačky 55,9% žiakov a z IX.B 57,1% žiakov!

Prijímacie skúšky vystriedal nábor: „Babičky a dědové se radují na promocích. Vzdělanost však trpí a upadá." – Prof. PhDr. Petr Piťha, CSc., minister školstva ČR v r. 1992–1994 na prednáške, ktorú mal 2. apríla 2008 na Univerzite Hradec Králové.

Vyčíňanie lesníkov:
Lesníci mali spilovať iba smreky, ktorých je v zmiešanom lese 99%, a to tak, aby smreky tvorili po výrube 98% všetkých stromov. Akú časť lesa vypília?

Riešenie: Nech je počet všetkých stromov x. Smrekov je $0{,}99\,x$, ostatných stromov $0{,}01\,x$. Vyrúbu m smrekov – počet smrekov bude $0{,}98(x-m)$, počet ostatných stromov $0{,}02(x-m)$. Pretože sa rúbali iba smreky, počet ostatných stromov sa nezmenil, taký, aký bol na začiatku ($0{,}01\,x$), je aj na konci ($0{,}02(x-m)$):

$$0{,}01\,x=0{,}02(x-m)$$
$$0{,}01\,x=0{,}02\,m$$
$$\frac{m}{x}=\frac{1}{2}$$

Lesníci by mali vyrúbať polovicu lesa!!

K riešeniu možno prísť číselne – stromov nech je 100, smrekov 99. Po vyrúbaní 2, 3, 4... smrekov stále nedostávame požadovaných 98%. Až po vyrúbaní 50 smrekov dostávame

$$\frac{49}{50}=0{,}98=98\,\%.$$

Odvaha počas vojenskej služby mala rozličné podoby. Napríklad aj takú, že keď učiteľ a major v jednej osobe skončil prednášku o zložení pohonných látok a snaživému frekventantovi poddôstojníckej školy po zrátaní všetkých percent vyšlo číslo menšie ako 100, zdvihol odvážne *ruku a spýtal sa, kde sú tie zvyšné percentá. „Tak to viete mládenci," odpovedal zaskočený major, „nádrž sa až po okraj nikdy nedolieva..."*

19. Erotický obrázok grafom funkcie

$$y=\frac{2}{3}\left[\frac{x^2+|x|-6}{x^2+|x|+2}\pm\sqrt{36-x^2}\right]$$

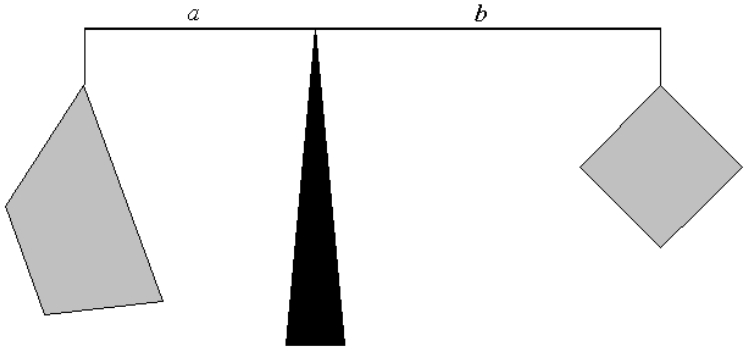
V jednoduchom ale dobrom programovacom jazyku BASIC sa dá graf nakresliť programom:

```
10 REM Obrazok
20 SCREEN 9 : CLS
30 FOR X=-6 to 6 STEP .002
40 Z=(X*X+ABS(X)-6)/(X*X+ABS(X)+2)
50 S=SQR(36-X*X)
60 Y1=(2/3)*(Z+S)
70 Y2=(2/3)*(Z-S)
80 PRESET (10*X+320,-10*Y1+150),12
90 PRESET (10*X+320,-10*Y2+150),12
100 NEXT X
110 END
```

Počítač začne kresliť nádherné krivky, ale kto tipuje, že to bude tá časť ženského tela, pri ktorej je „...poměrne jednoduchým tvarem dosaženo značného účinku." (Jiří Suchý: Lexikon pro zamilované, heslo „Ňadra"), tipuje vedľa!

20. Zisťujeme obsah lichobežníka – vážením

Z kartónu vystrihneme štvorec, napr. 10 cm x 10 cm a lichobežník. Lichobežník uviažeme na jeden koniec tenkej paličky, štvorec na druhý koniec. Paličku podoprieme tak, aby bola vo vodorovnej polohe. Zistíme vzdialenosti *a*, *b* miesta podopretia od okrajov paličky a vypočítame obsah lichobežníka.



Riešenie: Z rovnováhy momentov síl na páke vyplýva:

$$F_{\text{lich}}\cdot a=F_{\text{štvorec}}\cdot b$$

$$m_{\text{lich}}\cdot g\cdot a=m_{\text{štvorec}}\cdot g\cdot b$$

$$S_{\text{lich}}\cdot\cancel{h}\cdot\cancel{\rho}\cdot a=S_{\text{štvorec}}\cdot\cancel{h}\cdot\cancel{\rho}\cdot b$$

$$S_{\text{lich}}=S_{\text{štvorec}}\cdot\frac{b}{a}=100\,\text{cm}^2\cdot\frac{b}{a},$$

kde g je gravitačné zrýchlenie, h je hrúbka kartónu a ρ je jeho hustota.

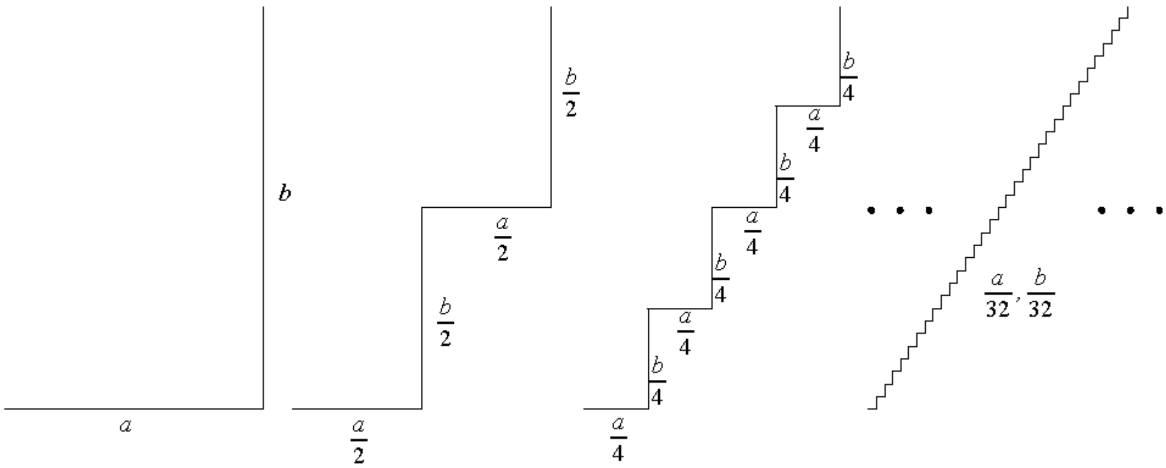
Vďaka kráteniu zlomkov sme sa dopracovali k prekvapivo jednoduchému výpočtu. Krátenie sa vždy vyplatí – vedie k správnym výsledkom:

$$\frac{sin\ x}{n}=?$$

$$\frac{si\cancel{n}\ x}{\cancel{n}}=?$$

$$six=6$$

21. Paradox lomenej čiary



$$\boldsymbol{s=a+b}$$

$$\boldsymbol{s=2\cdot\frac{a}{2}+2\cdot\frac{a}{2}=a+b}$$

$$\boldsymbol{s=4\cdot\frac{a}{4}+4\cdot\frac{a}{4}=a+b}$$

$$\vdots$$

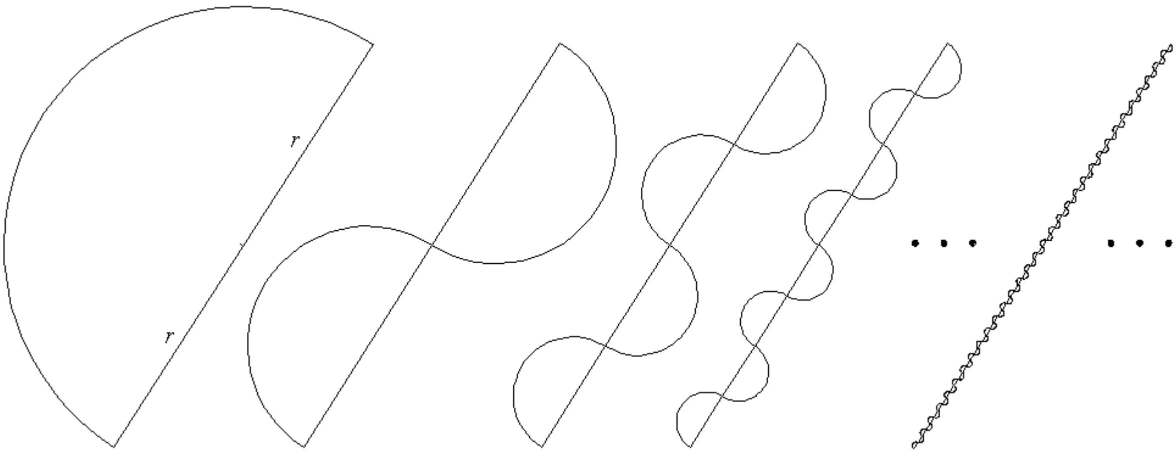
$$\boldsymbol{s=32\cdot\frac{a}{32}+32\cdot\frac{a}{32}=a+b}$$

$$\vdots$$

A keby úsekov bolo milión? Krivka dĺžky $a+b$ by sa blížila k úsečke dĺžky $\sqrt{a^2+b^2}$ (podľa Pytagorovej vety):

$$\boldsymbol{a+b=\sqrt{a^2+b^2}\ ???}$$

22. Paradox kružnicového oblúka



$$s=\pi r$$
$$s=2\cdot\left(\pi\frac{r}{2}\right)=\pi r$$
$$s=4\cdot\left(\pi\frac{r}{4}\right)=\pi r$$
$$s=8\cdot\left(\pi\frac{r}{8}\right)=\pi r$$
$$\vdots$$

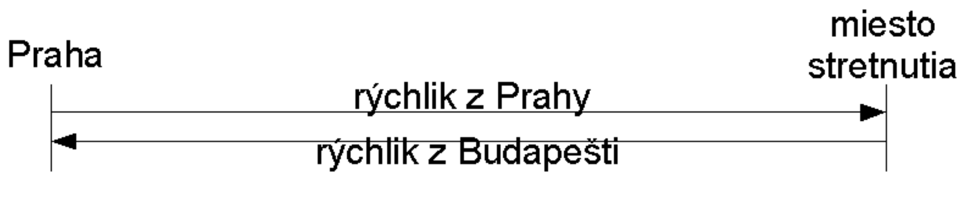
Postupne sa krivka stále viac podobá na úsečku dĺžky $2r$, čiže $2r=\pi r$???

Riešenie 21, 22: skutočnosť, že sa krivka blíži k úsečke ešte neznamená, že aj jej dĺžka sa blíži k dĺžke úsečky.

23. Hungaria expres

Vlak Eurocity 171 Hungaria idúci z Berlína do Budapešti má z Prahy odchod 11:39. EC 170 Hungaria idúci z Budapešti do Berlína prichádza do Prahy o 16:21. O koľkej hodine sa tieto vlaky stretnú?

Riešenie: zdanlivo neriešiteľná úloha – nepoznáme rýchlosti, ani dráhu. Veľa však napovie nákres situácie:



Rozdiel časov je 16:21 – 11:39 = 4:42. Polovica z tohto času pripadá na 1. rýchlik, polovica na protiidúci. Stretnú sa o 14:00.

V skutočnosti sa vlaky (3. septembra 2010) stretli o 14:02:50.

24. Kalkulačka vypočíta všetko

Komu budú patriť celosvetové zásoby ropy?

1) **Najviac ropy sa ťaží v arabských štátoch s počtom obyvateľov 142 miliónov – vložte do kalkulačky číslo 142.**
2) **Nejaké množstvo sa ťaží aj v Izraeli, kde žije 15,4 mil. obyvateľov – pripojte k číslu 142 ešte 15,4, takže na displeji je 14215,4.**
3) **Izrael bol vo vojne s Arabmi od r. 1969 – pripojte za horeuvedené číslo ešte 69, takže kalkulačka ukazuje 14215,469.**
4) **Vojna vtedy trvala 5 rokov – číslo na displeji vynásobte piatimi.**

Výsledok: 71077,345.

Riešenie: obráťte kalkulačku o 180°.

25. „Iracionálne ku šťastiu"

...je heslo bankovej inštitúcie, ktorá ponúka rodičom, aby založili pre narodené dieťa účet na ktorý vložia e (Eulerovo číslo – iracionálne) korún. Banka sľubuje, že po každom roku odčíta z účtu 1€ ako poplatok za vedenie účtu a vynásobí zbytok počtom rokov ktoré uplynuli od zavedenia účtu. V deň 25. narodenín dieťaťu vyplatia sumu, ktorú rodičia našetrili. Je to výhodné?

Riešenie: $e=2{,}718\ 281\ 828\ 459\ 045\ 235\ 360\ 287\ 471\ 352\ 662\ 497\ 757\ 247\ 093\ 699\ldots$ – číslo, podobne ako π, neukončené. Na výpočet použijeme kalkulačku, ktorá je poruke, t.j. mobil, a číslo zaokrúhlime na 9 platných miest:

$$p_1=e-1,\ \ p_2=2(p_1-1)=2(e-2),\ \ p_3=3(p_2-1),\ldots,p_{25}=25(p_{24}-1).$$

Po trochu zdĺhavom počítaní (čo by človek neurobil pre svoje dieťa...) vyjde ohromujúci výsledok $p_{25}=0{,}239\cdot 10^{17}$. Dieťa bude multimilionárom! Kalkulačka na počítači má však 16 platných miest. Zopakujeme ten istý výpočet (len s presnejšou hodnotou „e") na kalkulačke zabudovanej v operačnom systéme Windows, aby sme sa presvedčili, koľko generácií našich potomkov nebude musieť chodiť do práce. Výsledok je opäť šokujúci: $p_{25}=-0{,}365\cdot 10^{10}$. Dieťa by sme po uši zadĺžili! Neostáva iné, len vziať ceruzku a papier, počítať obecne a zaokrúhliť až na konci. Tentoraz vyjde číslo, pre banky také symptomatické, $p_{25}=1{,}039\ldots$

Zaujímavé je i to, že aj keď displeje rôznych mobilov pracujú s rovnakým počtom platných miest, dostávame rozličné výsledky, o čom sa dá v triede ľahko presvedčiť. Je to tým, že zabudované programy pre násobenie a sčítanie sú rôzne. Môžu sa líšiť v tom, kedy a ako zaokrúhľujú – či pred prevodom do dvojkovej sústavy, alebo až po ňom. Sú aj kalkulačky, ktoré pracujú v desiatkovej sústave. Kalkulačke nemožno neobmedzene dôverovať! Príklad je pravdaže fikciou, ale o bankách asi platí to, čo o nich povedal nemecký dramatik Bertolt Brecht (1898–1956): „Menším zločinom je banku vylúpiť, ako založiť".

26. Politik bez hlavy

Dokážte, že istý veľmi známy slovenský politik nemá hlavu (ani pätu).

Riešenie: Nech $a=b=1$. Potom:

$$b^2 = a \cdot b \quad / \cdot (-1)$$
$$-b^2 = -a \cdot b \quad / + a^2$$
$$a^2 - b^2 = a^2 - a \cdot b$$
$$(a+b) \cdot (a-b) = a \cdot (a-b) \quad / \cdot \frac{1}{a-b}$$
$$a + b = a \quad / - a$$
$$b = 0$$

Ak $b=1$ (pozri začiatok), potom 1 = 0. Ak má onen politik 1 hlavu a 1 = 0, potom nemá žiadnu hlavu. Navyše

$$1 = 0 \quad / \cdot 2$$
$$2 = 0$$

Ak $2=0$, potom namiesto dvoch nôh nemá žiadne nohy, ani päty – Q.E.D. (quod erat demonstrandum – čo bolo treba dokázať).

Fundamentálnym matematikom prekáža najmä to, že hoci Talmud obsahuje 613 prikázaní, 248 pozitívnych („konaj") a 365 negatívnych („nekonaj") a z nich desať korešponduje s kresťanstvom, príkaz „Nulou nikdy nedeľ, ak chceš stáť čistý pred tvárou svojich blížnych!" medzi nimi nie je ani náhodou.

27. Iný príklad delenia nulou

$$\boldsymbol{x^2 - 1 = x^2 + 2x + 1 \qquad (a)}$$
$$\boldsymbol{(x+1) \cdot (x-1) = (x+1)^2 \quad / : (x+1)}$$
$$\boldsymbol{x - 1 = x + 1 \quad / - x}$$
$$\boldsymbol{-1 = +1 \quad ???}$$

Riešenie: Koreňom rovnice (a) je číslo -1. Potom je deliteľ $x+1$ rovný nule.

Americká vojnová loď Yorktown, nosič riadených striel za miliardu dolárov, sa 21. septembra 1997 pri pobreží Virgínie zachvela, zastavila – a ostala bezbranne stáť. Do počítačov nahrali nový softvér pre ovládanie motorov, pričom prehliadli „nulu". Tá sa dostala do pamäte a keď sa počítačový systém pokúsil touto nulou deliť, 80 000 konských síl „zamrzlo". Trvalo tri hodiny, kým sa motory podarilo previesť na havarijné ovládanie a ďalšie tri dni kým technici uviedli loď do bojaschopného stavu.

28. Prečo je „mínus krát mínus" plus?

Riešenie: vysvetlenie (údajne najlepšie) tohto, pre mnohých najväčšieho zádrhelu matematiky, ponúka Martin Gardner (1914–2010). Predstavte si sálu zaplnenú dvoma druhmi ľudí – dobrými a zlými. Sčítanie nech znamená „poslať ľudí do sály" a odčítanie „odvolať ľudí zo sály". Kladný sa definuje ako „dobrý", záporný ako „zlý". Pripočítať kladné číslo znamená poslať dobrých ľudí do sály – zvýši sa objem „dobroty". Pripočítať záporné číslo znamená poslať do sály zlých ľudí, objem „dobroty" sa zmenší. Odpočítať záporné číslo znamená odvolať niekoľko zlých ľudí – „dobrota" vzrastie. To znamená, že pripočítanie záporného čísla je to isté, ako odpočítanie kladného a odpočítanie záporného je totožné s pripočítaním kladného. Násobenie je opakovanie sčítania. Mínus tri krát mínus päť? Odvolaj päť zlých ľudí. Opakuj to trikrát. Výsledok: „dobrota" vzrastie pätnásťkrát...

Martin Gardner je pre popularizátorov matematiky výbornou adresou. V časopise Scientific American mu celé desaťročia vychádzal stĺpec „Matematické hry”. Okruh jeho záujmov bol obrovský. Pokladá sa za zakladateľa skepticizmu, bol vášnivým kritikom tzv. paranormálnych javov a hoci kritizoval aj organizované náboženstvo, veril v Boha. (Tvrdil, že cíti, že je možné, aby boli modlitby vyslyšané.) V našich končinách sú známe najmä jeho flexagóny.

29. Lavína lacných bicyklov

„Nový značkový bicykel so špičkovou výbavou za 50€!“ Firma záujemcom poskytne bližšie informácie… Tu sú: za 50 € dostanete od predávajúcej firmy 4 poukazy, ktoré treba predať svojim známym po 50 €. Zarobených 200 € pošlete predávajúcej firme a bicykel je váš! Zaplatili ste síce 250 €, ale z vášho vrecka išlo iba 50€. A čo bude robiť známy XY s kúpeným poukazom? Firma mu ho vymení za 5 takých istých poukazov, takže má šancu získať 250€ od ľudí, ktorým poukazy predá. Za 250€ tiež získa bicykel, ale svoju peňaženku odľahčí len o 50 €. Nový majitelia poukazov ich v predávajúcej firme opäť vymenia, jeden kus za päť, a tak to pokračuje ďalej. Akú šancu má získať bicykel ten, čo je desiaty v poradí?

Riešenie: prvý majiteľ poukazu pravdepodobne ľahko zoženie štyroch kupujúcich, tí musia presvedčiť ďalších 20 (každý zo štyroch predáva 5 poukazov) a dvadsiati musia spolu nájsť 100 ľudí. Zatiaľ je do akcie zapojených 1+4+20+100=125 ľudí a z nich 25 má bicykel a 100 má nádej. Ale keď už do toho „vrazili“ svojich 50 €, budú sa iste snažiť a číselná pyramída vyzerá potom od začiatku takto:

1.	1
2.	4
3.	20
4.	100
5.	500
6.	2 500
7.	12 500
8.	62 500
9.	312 500
10.	1 562 500

Potenciálnych 1 562 500 majiteľov poukazov by malo získať ďalších 7 812 500 dôverčivých. Firma vlastne prinútila 4/5 účastníkov tejto hry aby kúpili tovar jednej pätine.

„Lavína vzájomného balamutenia“ – charakterizoval túto aféru ruský spisovateľ I. I. Jasenskij. Námet je z predrevolučného Ruska, kde akcia „Velosiped za 10 rublej“ údajne prebehla. V r. 1978 ju opísal J. I. Pereľman (viď použitú literatúru), pričom si neodpustil poznámku, že v Rusku sa to mohlo stať iba v „darevolučnye gody“ ale „za rubežom“ (za

hranicami) je to bežný jav. Možno už vtedy videl za horizontom Slovakiu (alebo BMG Invest)...

Bicykle v Sovietskom zväze boli žiadaným artiklom, o čom svedčí hlásenie Rádia Jerevan: „Včerajšiu správu o tom, že občan Moskvy Ivan Ivanovič Ivanov dostal za odmenu zdarma automobil značky Volga opravujeme: I. I. Ivanov nie je obyvateľom Moskvy, ale Leningradu, nešlo o automobil zn. Volga, ale o bicykel a občanovi Ivanovovi ho nedarovali, ale ukradli.“

30. Ozubené kolesá

...zapadajú do seba. Menšie má 8 zubov, väčšie, nepohyblivé, 24. Koľkokrát sa okolo svojej osi otočí menšie koleso, ak bude rolovať okolo väčšieho (ktoré sa nehýbe) a po jednom okruhu sa vráti do pôvodnej polohy?

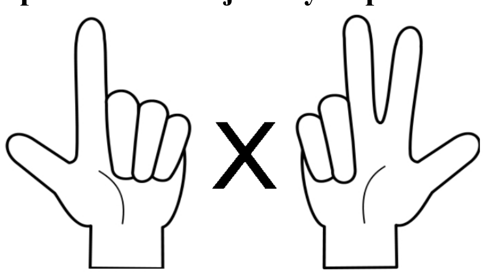
Riešenie: $24/8=3$, čo však nie je správna odpoveď. Menšie koleso sa okolo svojej osi otočí 4-krát. Trikrát by sa otočilo, keby 24 zubov nebolo na kružnici, ale v jednej priamke.

Jednoducho sa to dá ukázať na dvoch rovnakých minciach. Jednu pevne pritlačíme na podložku a druhou okolo nej rolujeme. Minca sa okolo svojej osi otočí nie jedenkrát, ale dvakrát. V tomto príklade sa skrýva aj odpoveď na otázku, prečo je tzv. hviezdny deň kratší než slnečný. Vzhľadom k hviezdam sa totiž Zem okolo svojej osi neotočí za rok 365¼-krát, ale 366¼-krát.

31. Násobíme na prstoch

Napríklad 7x8. Na prstoch jednej ruky ukážeme o koľko je prvé číslo väčšie ako 5, to isté urobíme na prstoch druhej ruky. Spočítame vystreté prsty, vynásobíme to desiatimi a k výsledku pripočítame súčin nevystretých prstov na oboch rukách:

$$\mathbf{7\cdot 8=5\cdot 10+2\cdot 3=56}$$



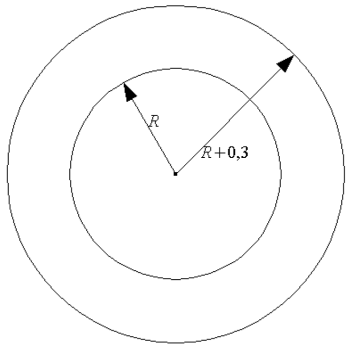
Riešenie: zrejme takto možno násobiť len čísla od 6 do 10. Označme prsty: vystreté $a=2, b=3$; nevystreté $c=3, d=2$. Počítanie funguje vďaka nasledujúcim rovniciam:

$$(10-c)\cdot(10-d)=100-10(c+d)+c\cdot d=10(10-c-d)+c\cdot d=10(a+b)+c\cdot d$$

História pozná takéto počítanie ako tzv. cigánsku násobilku. Násobenie deviatimi (na prstoch) je ešte jednoduchšie. Položíme obe ruky na stôl. Prsty v poradí zľava doprava predstavujú druhého činiteľa (prvým je 9). Násobíme napr. 9x7. Zdvihneme siedmy prst. Vľavo od neho je 6 prstov, vpravo 3 → 63.

32. Opásaná zemeguľa

Predstavte si, že ovinieme zemeguľu povrazom (povraz = rovník). O koľko km musíme povraz predĺžiť, ak chceme, aby medzi povrazom a zemeguľou bola všade medzera 30 cm?



Riešenie: $\text{predĺženie} = 2\pi(R+0{,}3) - 2\pi R = 2\pi \cdot 0{,}3\,\text{m} = 1{,}9\,\text{m}$. Povraz treba predĺžiť o necelé 2 metre!

$\dfrac{obvod}{priemer} = konštanta$ pre všetky kružnice. „Noe 2 thyges can be moare equalle!” – konštatoval v r. 1557 anglický fyzik a matematik Robert Recorde (1510–1558).

33. Penzión s dvanástimi izbami

Do penziónu prišlo 13 cudzincov a každý chcel izbu pre seba. Ako ich ubytovať?
„Riešenie”: recepčný zapísal hostí do knihy návštevníkov a potom im osobne rozdelil izby. Trinásteho požiadal, aby chvíľku počkal s prvým hosťom v izbe č. 1. Teda v prvej izbe boli dvaja. Tretieho dal do izby č. 2, štvrtého do čísla 3, piateho do čísla 4 a tak ďalej až dvanásteho do izby č. 11. potom sa vrátil do jednotky, vyvolal trinásteho hosťa a priviedol ho do prázdnej izby č. 12 (a spokojne sa vrátil na recepciu).

Riešenie: „zabudli” sme na druhého hosťa – ten sa v texte vôbec nespomína.

34. Hilbertov hotel Nekonečno...

...mal plne obsadených nekonečne veľa izieb. Prišiel však nový hosť s rezerváciou. Recepčná chvíľu premýšľala, ale keďže toho dosť vedela o nekonečných množinách, pomocou hotelového rozhlasu presťahovala každého ubytovaného do izby s číslom o jednotku väčším. Nový hosť sa ubytoval v izbe č. 1. Vydýchla si, že problém vďaka usilovnému štúdiu zvládla. Práve vtedy však pred hotelom zastal autobus s nekonečným počtom hostí. Ako ich ubytovala?

Riešenie: požiadala všetkých hostí, aby sa presťahovali do izby s číslom 2-krát väčším ako mali pôvodne. Z č.1 do č.2, z č.2 do č.4, z č.3 do č.6 atď. Tak ostalo voľných nekonečne veľa izieb s nepárnymi číslami.

Počítanie s ∞ je veľmi inšpiratívne: $\lim\limits_{x\to 8^+} \dfrac{1}{x-8} = \infty \quad \to \quad \lim\limits_{x\to 5^+} \dfrac{1}{x-5} = \rotatebox{90}{5}$.

35. Paradox nečakanej písomky

Učiteľ oznámi žiakom, že budú niektorý deň v nasledujúcom týždni písať písomnú prácu. Povie im: „Písomka bude presne o 13:00 hodine, ale dozviete sa to až ráno v ten deň o 8:00 hodine. Prečo sa žiaci nesmierne potešili?

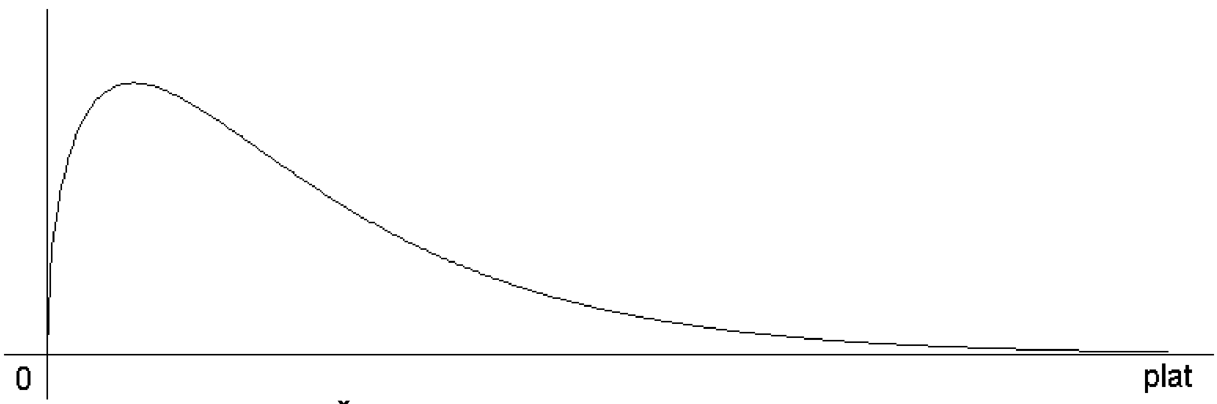
Riešenie: pretože ak učiteľ dodrží slovo, písomku písať nemôžu. V piatok ju nemôžu písať, lebo ak do štvrtka 8:00 písomku neoznámi, žiaci by hneď vedeli, že ju píšu v piatok, čo je v rozpore s podmienkou, že sa to majú dozvedieť až v deň písania písomky. Štvrtok sa teda stáva posledným možným dňom písania písomky. Ak to však učiteľ do stredy 8:00 neoznámi, žiaci budú vedieť, že ju píšu nasledujúci deň, takže štvrtok „padá". Takto sa pokračuje až do pondelka...

36. Nadpriemerný počet rúk a nôh

Je výrok „Väčšina ľudí má nadpriemerný počet rúk a nôh" pravdivý alebo nepravdivý?

Riešenie: bohužiaľ pravdivý! Existuje veľa ľudí, ktorí v dôsledku choroby, úrazu, vojny... stratili jednu alebo viac končatín. Keď sa celkový počet nôh (rúk) spriemeruje, priemer vyjde menší ako 2.

Bývalý slovenský prezident Rudolf Schuster raz vyhlásil, že viac ako polovica Slovákov má podpriemernú mzdu, za čo sa mu ušlo kritiky, ba až výsmechu. Neprávom! Medián (prostrednú hodnotu) si novinári pomýlili s priemernou hodnotou. Platy v SR totiž netvoria Gaussovu krivku, pri ktorej sa medián rovná priemeru. Krivka nie je symetrická, existuje skupina ľudí s extrémne vysokými platmi, ktoré „deformujú" priemer – posúvajú ho do vyšších hodnôt.:



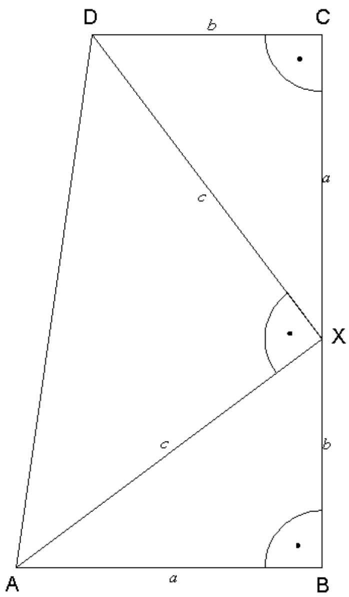
37. Kto je Škót a kto Angličan?

V bare sa stretol Škót a Angličan – obaja veľkí vlastenci. Jeden z nich povedal: „Ak sa Škót presťahuje do Anglicka, zvýši sa inteligencia v oboch krajinách." Viete na základe tohto tvrdenia určiť jeho národnosť?

Riešenie: Keďže odchodom Škóta zo Škótska sa priemerná inteligencia v krajine zvýšila, musel mať tento Škót v Škótsku podpriemernú inteligenciu. Jeho príchodom sa však inteligencia v Anglicku zvýšila, čiže musel byť inteligentnejší ako priemerný Angličan. Vzhľadom na vlastenecké cítenie oboch osôb je jasné, že autorom tvrdenia je Škót.

38. Prezident USA a Pytagorova veta

James Abraham Garfield (1831–1881), dvadsiaty americký prezident mal záľubu v matematike. Objavil zaujímavý dôkaz Pytagorovej vety. Využil pritom lichobežník, ktorý sa skladá z troch pravouhlých trojuholníkov, a vypočítal obsah lichobežníka dvoma spôsobmi.



Riešenie:

$$\frac{(|AB|+|CD|)\cdot(|BX|+|XC|)}{2}=S_{ABX}+S_{XCD}+S_{AXD}$$

$$\frac{(a+b)\cdot(b+a)}{2}=\frac{a\cdot b}{2}+\frac{a\cdot b}{2}+\frac{c\cdot c}{2} \quad /\cdot 2$$

$$(a+b)\cdot(a+b)=a\cdot b+a\cdot b+c^2$$

$$a^2+2ab+b^2=2ab+c^2 \quad /-2ab$$

$$a^2+b^2=c^2$$

Iný veľký štátnik, Napoleon Bonaparte (1769–1821) vyhlásil: „Rozvoj a úroveň matematiky úzko súvisia s prosperitou štátu". Sám sa venoval štúdiu matematiky a pripisuje sa mu táto veta: Keď nad stranami ľubovolného trojuholníka zostrojíme tri rovnostranné trojuholníky a opíšeme im kružnice, potom stredy týchto troch kružníc budú vrcholmi ďalšieho rovnostranného trojuholníka.

39. Truel – duel pre troch

Jedného dňa sa páni Čierny, Šedivý a Biely rozhodli vyriešiť vzájomný spor pomocou truelu s revolvermi – bude sa strieľať tak dlho, až bude živý iba jeden. Pán Čierny je najhorší strelec – do terča trafí približne 1-krát z troch pokusov, pán Šedivý je lepší – trafí dvakrát z troch a pán Biely trafí zakaždým. Aby bol súboj spravodlivý, pán Čierny bude strieľať prvý, pán Biely druhý (ak bude naživе), po ňom pán Šedivý, ak bude v tom čase živý, a potom stále dokola, kým nezostane živý iba jeden. Na koho má pán Čierny zamieriť svoju prvú ranu?

Riešenie: prvú ranu by mal vypáliť do vzduchu! Ak by totiž namieril na pána Šedivého a bol by úspešný, ďalšiu ranu má 100%-ný strelec Biely a pán Čierny je mŕtvy. Zdá sa, že lepšia možnosť pre pána Čierneho je zamieriť na pána Bieleho. Keď bude úspešný, bude po ňom strieľať pán Šedivý a ešte má nádej, že prežije prvé kolo a bude môcť strieľať na pána Šedivého. Úplne najlepšia možnosť je však strieľať do vzduchu. Ďalší strelec – pán Šedivý bude nepochybne strieľať na pána Bieleho. Ak Biely prežije, je isté, že zamieri na nebezpečnejšieho súpera – pána Šedivého. Výstrelom do vzduchu teda umožní pán Čierny pánu Bielemu, aby vyradil pána Šedivého, alebo naopak.

Pán Čierny výstrelom do vzduchu zmenil situáciu tak, aby namiesto prvého výstrelu v trueli mal prvý výstrel v dueli.

Príklad možno poňať ako pravdepodobnostnú hru – hádzanie kockou. Hráči sa rozdelia do trojíc, trojica má jednu kocku. Pán Čierny zasiahne cieľ ak mu padne 1 alebo 2, pán Šedivý trafí ak mu padne 1,2,3 alebo 4 a pán Biely vlastne ani nemusí hádzať. Pri veľkom množstve hier, ktorých výsledky sa zaznamenávajú do tabuľky, by sa malo potvrdiť, že súboj je veľmi nespravodlivý v prípade, že sa nepovolí streľba do vzduchu, a o čosi spravodlivejší, ak sa takáto činnosť povolí.

40. Koľko predkov má Jerguš Lapin?

Mal dvoch rodičov, každý z nich mal opäť dvoch rodičov atď. Ak by sme sledovali tento rodokmeň 40 generácií naspäť, teda zhruba okolo 1000 rokov, prídeme k záveru, že celkový počet predkov Jerguša Lapina je 2^{40}, čo je viac, ako ich žilo za posledných 1000 rokov na Zemi???

Riešenie: naozaj 2^{40} je viac ako 1 000 miliárd a toľko ľudí určite nežilo za posledných 1 000 rokov. Chybný je predpoklad, že predkovia nejakého človeka tvoria rodostromy, ktoré nemajú navzájom spoločné prvky. Rodičia Jerguša Lapina mohli mať nejakých spoločných predkov a táto úvaha platí aj pre starých rodičov, prarodičov atď.

41. Pravdepodobnosť – ako to celé začalo

Dvaja hazardní hráči hrajú hru v kocky na 5 hier. Za stavu 2:1 pre „A” je hra náhle prerušená. Ako si rozdelia peniaze, nachádzajúce sa v banku?

Riešenie: možnosti ďalšieho postupu – tzv. nahliadnutie do budúcnosti:
1) A vyhrá 4. aj 5. hru
2) A vyhrá 4. a B 5. hru
3) B vyhrá 4. a 5. hru
4) B vyhrá 4. a A 5. hru

V prípade že nastane 1), 2), 4) je istým víťazom A. Len ak A prehrá 4. aj 5. hru, víťazom je B. Bank sa delí v pomere 3:1 pre A.

Problém nedokončenej hry sformuloval prvýkrát v 15. storočí mních Luca Pacioli (asi 1445–1514), ktorý učil matematiku Leonarda da Vinciho (1452–1519). K Pascalovi sa dostal prostredníctvom francúzskeho šľachtica Chevaliera de Méré (o ktorom ešte bude reč). Pascal nedokázal problém sám vyriešiť, požiadal o radu P. Fermata (1601–1665).

42. Hádžeme kockou 50-krát...

...a dostaneme napríklad postupnosť čísel
36254156214253321512453252541632514265214512663425.
Keby všetci ľudia žijúci v súčasnosti na našej zemeguli hodili každý kockou tiež 50-krát, aká je pravdepodobnosť, že by niekto dostal rovnakú postupnosť? Veľmi veľká, alebo malá?

Riešenie: prakticky žiadna! Za celú históriu Zeme sa na nej vystriedalo asi 100 miliárd ľudí. Keby títo všetci hádzali 100 rokov, vždy každý 1-krát za minútu, šanca, že vytvorí niekto rovnakú postupnosť, je menšia než 1:100 000 000 000 000 000 000.

Existuje matematická historka, vymyslená francúzskym matematikom É. Borelom (1871–1956) o tom, ako necháme milión opíc búšiť do písacích strojov. Opice by potrebovali bilióny, bilióny, bilióny, bilióny rokov k tomu, aby mali šancu 0,1% napísať jednu súvislú vetu obsahujúcu 10 slov. Je jasné, že ak čas písanie predlžujeme, tak spomenutá šanca narastá. Slávna „Infinite monkey theorem" (Veta o donekonečna píšucej opici) dokonca hovorí, že tá šanca narastá k 100%: čiže ak necháme opice písať donekonečna, tak na 100% želanú vetu raz napíšu.

43. Čierne a biele guľôčky

Máme dve nádoby. Nádoba A obsahuje dve čierne a tri biele guľôčky, nádoba B dve čierne a jednu bielu guľôčku. Náhodne zvolíme jednu nádobu a vyberieme jednu guľôčku. Aká je pravdepodobnosť, že bude biela?

Riešenie: počet čiernych a bielych guľôčok je rovnaký, ponúka sa odpoveď $\frac{1}{2}=50\%$. Nie je to však tak. Nádobu vyberáme s pravdepodobnosťou $\frac{1}{2}$. V nádobe A by sme bielu vytiahli s pravdepodobnosťou $\frac{3}{5}$. Keďže voľba nádoby a voľba guľôčky sú dve nezávislé udalosti nasledujúce po sebe, pravdepodobnosti vynásobíme. Pre nádobu A: $\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{5}=\frac{3}{10}$. Podobne pre nádobu B: $\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3}=\frac{1}{6}$. Pravdepodobnosť, že vytiahneme bielu z jednej alebo druhej nádoby je súčtom oboch pravdepodobností – ide o dosiahnutie cieľa dvoma nezávislými cestami: $\frac{3}{10}+\frac{1}{6}=\frac{7}{15}<50\%$. Hodnota 50% pre pravdepodobnosť vytiahnutia bielej by sa dosiahla napríklad tak, že v nádobe B by boli 4 biele a 6 čiernych guľôčok a obsah nádoby A by ostal nezmenený $\left(\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{5}+\frac{1}{2}\cdot\frac{4}{10}=\frac{1}{2}\right)$.

44. Wetten, dass..?

Vyberieme náhodne 45 ľudí (napr. dve triedy na výlete). Stavte sa, že dvaja z nich budú mať narodeniny v ten istý deň (deň a mesiac, nie rok)!

Riešenie: kto ešte nepočul o „narodeninovom probléme", ľahko podľahne ilúzii, že 45 ľudí pokryje 45 dní z 365, teda pravdepodobnosť tohto javu je $\frac{45}{365}=12{,}3\%$ a staviť na skutočnosť, že taký jav nenastane, je veľmi výhodné. To by však bolo iba horné ohraničenie pre pravdepodobnosť, že niekto z našich 45 ľudí má narodeniny práve dnes. My sa však pýtame na niečo iné: či nejaká dvojica ľudí má narodeniny v rovnaký (hociktorý) deň. Počet dvojíc je oveľa vyšší než počet ľudí. Pri čísle 45 je to $\frac{45\cdot 45-45}{2}=990$. Potom vyjde pravdepodobnosť $\frac{990}{365}=2{,}71=271\%$, čo je číslo značne nereálne, pretože je možné, že niekoľko rôznych dvojíc má narodeniny v rovnaký deň. Po oprave

$\left(\text{výpočet: } 1-\frac{365\cdot 364\cdot 363\cdots 321}{365^{45}}\right)$ dostaneme výsledok 0,941. Pravdepodobnosť výhry je teda veľmi vysoká, až 94,1%!

Ak by sa niekto naozaj chcel staviť, tu je tabuľka pre iné počty osôb:

Počet osôb	*Počet dvojíc*	Pravdepodobnosť zhody *(%)*
4	*6*	*1,64*
10	*45*	*11,69*
20	*190*	*41,14*
23	*253*	*50,73*
30	*435*	*70,63*
35	*595*	*81,44*
40	*780*	*89,12*
41	*820*	*90,32*
45	*990*	*94,10*
50	*1225*	*97,04*

45. Rodina s dvomi deťmi

...jedno z nich je dcéra. Aká je pravdepodobnosť, že rodina má dve dcéry, ak vieme, že dievčatá a chlapci sa rodia s 50 % pravdepodobnosťou?

Riešenie: sedliacky rozum napovedá, že druhé dieťa môže byť rovnako dobre syn ako dcéra – pravdepodobnosť je teda 50%. V skutočnosti však môžu byť dve deti „nakombinované" takto:

syn – syn (nevyhovuje), dcéra – dcéra, dcéra – syn, syn – dcéra.

Dve dcéry sa vyskytujú v jednom prípade z troch, pravdepodobnosť je teda 1/3 = 33,3%. („Jedno z detí je dcéra" nie je to isté, čo „Prvé z detí je dcéra".)

46. Na mene záleží!

Istá rodina má tiež dve deti. Jedno z nich je dcéra Mária. Aká je pravdepodobnosť, že rodina má dve dcéry?

Riešenie: poučení z predchádzajúceho príkladu – 33,3%. Aké možnosti však vyhovujú zadaniu?

Mária – chlapec, chlapec – Mária, Mária – iné dievča, iné dievča – Mária

Vyhovujú dve možnosti zo štyroch, pravdepodobnosť je náhle 50%!

47. Rytier Chevalier de Méré (1607–1684)

...žijúci na dvore kráľa Ľudovíta XIV. zarábal veľké čiastky peňazí tak, že uzatváral stávky – pri štyroch hodoch kockou že padne aspoň jedna šestka. Aká bola pravdepodobnosť jeho výhry?

Riešenie: pravdepodobnosť, že 6 nepadne ani raz je pri jednom hode je $\frac{5}{6}$. Pri štyroch je to $\frac{5}{6}\cdot\frac{5}{6}\cdot\frac{5}{6}\cdot\frac{5}{6}=48{,}2\,\%$. Pravdepodobnosť jeho výhry je dostatočná – 51,8%. Zákon veľkých čísel mu zaručoval zisk.

Takmer všetky hazardné hry – ruletou počínajúc a videolotériovým terminálom končiac – sú založené na rovnakom princípe. Zaručujú síce malý, ale dlhodobý zisk (ruleta 1–2%). Výrobcovia automatov udávajú, že zákazník dostane späť 88–95% svojich peňazí.

48. Kto veľa má, chce ešte viac!

Rytierovi de Méré sa zisk málil. Upravil stávku tak, že pri 24 hodoch dvoma kockami padne aspoň raz dvojica šestiek. O koľko % zvýšil pravdepodobnosť výhry?

Riešenie: rytier de Méré začal prehrávať (a celý zmätený požiadal o pomoc – koho iného ako B. Pascala). Uvažoval chybne, takto: pravdepodobnosť, že padne dvojica šestiek je $\frac{1}{36}$, pri 24 hodoch $\frac{24}{36}=\frac{2}{3}$. Správne je však: $1-\left(\frac{35}{36}\right)^{24}=49{,}1\,\%$.

Fatálne sa mýlil napríklad aj náš veľký učiteľ Ján Amos Komenský (1592–1670). Do konca svojho života konštruoval perpetuum mobile a keď sa mu zdalo, že dosiahol svoj cieľ, napísal na oslavu perpetua mobile spis „De arte spontanei motus”.

49. Charlie Rýchla ruka

...má tri karty – jedna je z oboch strán červená, druhá z oboch strán biela a tretia z jednej strany červená, z druhej biela. Zamieša ich, jednu náhodne vytiahne a hodí na stôl. Viditeľná strana je červená. Aká je pravdepodobnosť, že aj druhá strana je červená?

Riešenie: úvaha „50 na 50”, t.j. pravdepodobnosť 50% je zavádzajúca. Zdalo by sa síce, keďže bielo–biela už nie je v hre a zostali len červeno–biela a červeno – červená, že na červenú pripadá 50%. Ibaže červeno–červená „ukáže” červenú stranu s dvakrát väčšou pravdepodobnosťou ako červeno–biela (č – č, č – č, č – b). Pravdepodobnosť, že druhá strana je červená je teda 2/3.

50. Problém Montyho Halla

Odmena sa skrýva v jednej z troch uzavretých skriniek. Dve sú prázdne. Náhodne na jednu ukážeme a niekto, kto pozná výsledok, otvorí jednu zo zostávajúcich a ukáže, že je prázdna. Oplatí sa zmeniť voľbu – ukázať na zvyšnú skrinku – alebo ostať pri pôvodnej? V ktorom prípade je pravdepodobnosť výhry väčšia? (Problém je pomenovaný po moderátorovi televíznej súťaže Let's make a deal (Rozhodnime sa).)

Riešenie: väčšina ľudí – dokonca s nie hocakým matematickým vzdelaním (MIT, Floridská, Michiganská univerzita) – sa pri prvej prezentácii tohto problému domnievala, že šanca na výhru je rovnaká, či už voľbu zmeníme, alebo nie (patril medzi nich aj Paul Erdős, jeden z najznámejších matematikov 20. storočia). Diskusiu o probléme rozpútala Marilyn vos Savantová tvrdiac, že pri zmene voľby šanca na výhru vzrastie z 1/3 na 2/3. Ponúka sa takéto vysvetlenie: ak sme náhodou vybrali správnu skrinku (pravdepodobnosť 1/3) a potom svoje rozhodnutie zmeníme, o odmenu prídeme. Ak sa však na začiatku netrafíme (to sa stane s pravdepodobnosťou 2/3), ostáva „otváračovi" na otvorenie iba jedna skrinka, a to tá, v ktorej odmena nie je. V druhej odmena je a ak na ňu ukážeme (zmeníme voľbu), odmena je istá. Zmena voľby teda znamená, že s pravdepodobnosťou 1/3 nič nevyhráme (ak by sme prvýkrát trafili správne) a so zostávajúcou pravdepodobnosťou 2/3 je odmena naša.

Vos Savantová, ktorej riešenie spochybňovali viacerí matematici, vyzvala „vyučujúcich matematiky celej krajiny" aby hru vyskúšali na hodine ako experiment – pri 200 pokusoch voľbu nemeniť, pri 200 zmeniť a porovnať výsledky. Mnoho učiteľov základných škôl výzvu prijalo. Ich reakcie boli takéto: „S veľkým potešením vám naša trieda oznamuje, že získané výsledky podporujú váš názor". Jeden študent jej vyjadril veľkú vďaku za to, že ho na dva dni zachránila od zlomkov...

Mimochodom, Vos Savantová (americká spisovateľka a novinárka) mala ako 10-ročná v roku 1957 najvyššie IQ medzi svojimi rovesníkmi v USA – 228, čo zodpovedá podľa psychológov IQ 185 u dospelého človeka.

51. Hádžeme mincou

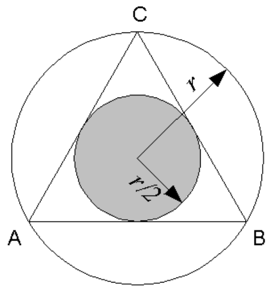
Hádžeme 12-krát. Ktorá z možností je najmenej a ktorá najviac pravdepodobná?
a) č č z č z z č č z z z č
b) č č č č č č č č č č č č
c) z č z č z č z č z č z č

Riešenie: „pravdepodobne" ani sugestívna otázka už nikoho nepomýli – všetky možnosti sú rovnako pravdepodobné: $\frac{1}{2^{12}} = \frac{1}{4096} = 0{,}000244$.

Autor v čase svojich stredoškolských štúdií podal tiket športky s číslami 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7. Jeho matka, ktorá tiket niesla na poštu, sa vrátila s odkazom, či sa syn zbláznil. Slúži však ku cti pani poštárky, že tiket – aj keď s istým zdráhaním – napokon prevzala. A vlastne aj o tom boli predchádzajúce úlohy – nepodľahnúť ilúzii! Vyplatí sa to nielen v matematike, ale aj v bežnom živote.

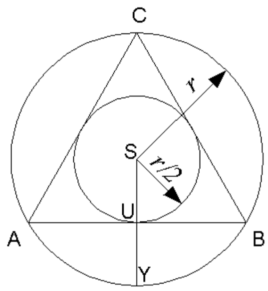
52. Jedna úloha – tri riešenia!

V kružnici náhodne narysujeme tetivu. Aká je pravdepodobnosť, že táto tetiva bude dlhšia než strana rovnostranného trojuholníka vpísaného do kružnice?



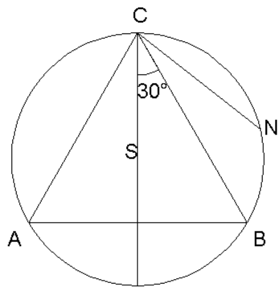
Riešenie a): Ak stred tetivy padne do vnútra kruhu vpísaného trojuholníku ABC, tak tetiva bude dlhšia než strana trojuholníka ABC. Polomer kružnice opísanej trojuholníku ABC je dvojnásobok polomeru vpísanej kružnice. Hľadaná pravdepodobnosť je pomer obsahov malého a veľkého kruhu:

$$P_1 = \frac{\pi \cdot (r/2)^2}{\pi \cdot r^2} = \frac{1}{4}.$$



Riešenie b): Dĺžka tetivy je určená vzdialenosťou jej stredu X od stredu kružnice S. Bod X sa pohybuje po úsečke SY, U je stred strany AB. Tetiva bude dlhšia než strana AB, ak jej stred bude ležať na úsečke SU. Bod X sa volí náhodne na úsečke SY, hľadaná pravdepodobnosť je preto pomer dĺžok úsečiek SU a SY:

$$P_2 = \frac{r/2}{r} = \frac{1}{2}.$$



Riešenie c): Predpokladajme, že jeden koncový bod tetivy je daný – nech je to napr. bod C. Náhodná tetiva CN môže s úsečkou CS zvierať uhol 0° až 90°. Pre náš prípad je priaznivý uhol $|\sphericalangle SCN|$ od 0° po 30°, preto:

$$P_3 = \frac{30°}{90°} = \frac{1}{3}.$$

Riešenie a)+b)+c): Každé z nich popisuje iný pokus s odlišným poňatím „náhodného" umiestňovania tetivy do kruhu. Treba teda dopredu vedieť, akým spôsobom tetivu umiestňovať.

Nemecká značka módy René Lezard mala na začiatku 90-tych rokov takýto reklamný slogan: „Nepotrebujete perfektne padnúce obleky, aby ste sa stali ministrom financií. Ale tá investícia by bola rozumná. René Lezard. Bohužiaľ drahé."

Aj matematika je niekedy „bohužiaľ ťažká". Ale investovať do nej je rozumné. V Nemecku to pochopili skôr ako u nás. V "Hightech-stratégii" nemeckej vlády z roku 2006 sa slovo matematika ešte nevyskytuje, o rok neskôr sa už matematika oslavuje ako „kľúč k rozvinutým technológiám".

53. Test na chorobu

Predpokladajme, že test na nejakú chorobu má spoľahlivosť 95%. V sledovanej populácii nech má túto chorobu napríklad 0,5% ľudí. Ak dal test u náhodne vybranej osoby pozitívny výsledok, aká je pravdepodobnosť, že táto osoba chorobu skutočne má?

Riešenie: Väčšina ľudí bez váhania odpovie 95%, lebo taká je spoľahlivosť testu. Skutočná pravdepodobnosť je však iba 8,7%! Najjednoduchšie vysvetlenie je na konkrétnych číslach. Keby test aplikovali na 100 000 ľuďoch, z tejto vzorky by chorobu malo zhruba 500 ľudí (0,5%). 99 500 ľudí by chorobu nemalo. Test dáva nesprávny výsledok u piatich percent ľudí, teda zo zdravých by označil ako chorých 4975 ľudí, z chorých by označil ako chorých 475 ľudí. Spolu by bolo 5450 pozitívnych testov, z nich je len 475 ľudí skutočne chorých. Preto:

$$P=\frac{475}{5450}=0{,}087=8{,}7\%.$$

Pozitívny test pravdaže opakujú. U znovu pozitívne testovaných sa pravdepodobnosť choroby prudko zvyšuje: po druhom pozitívnom testovaní je 64,5%, po treťom 97,2%, po štvrtom 99,5% a po piatom temer 100%.

Na životospráve záleží! Rakúsky matematik Leopold Vietoris (1891–2002) bol dlhé roky najdlhšie žijúcim Rakúšanom. Existuje historka o výlete rakúskej akadémie vied do kláštora v Melku na sklonku 90-tych rokov minulého storočia, kde Vietoris mimochodom poznamenal: „Tu som pred sto rokmi študoval“.

54. Darček na záver

V zbierkach úloh sa takmer vždy vyskytujú príklady, ktorých riešenie „...prenecháme čitateľovi”:

$$\mathbf{-1=(-1)^3=(-1)^{\frac{6}{2}}=\sqrt{(-1)^6}=\sqrt{1}=1}\ ???$$

Záver

Výberom príkladov tejto zbierky som sa snažil podporiť moderné vyučovacie stratégie (heuristika, brainstorming), ponúknuť užívateľom – učiteľom – materiál v podobe „okamžite použiť“. V neposlednom rade som sa snažil čitateľa nenudiť. To je aj leitmotív mojej učiteľskej práce – nedopustiť v triede ani jedno zívnutie! Ak sa učiteľovi darí okrem materiálnych odmien získať aj tzv. nemateriálne, potom jednou z nich je zaiste aj prekvapivé zistenie jeho žiakov, že je už koniec hodiny (matematiky).

Použitá literatúra

knihy:

Acheson, D. (2006). *1089 a další parádní čísla.* Praha: Matfyzpress.

Anděl, J. (2000). *Matematika náhody.* Praha: Dokořán.

Beckmann, P. (1998). *Historie čísla* π. Praha: Academia.

Bludov, M. I. (1979). *Besedy o fyzike.* Bratislava: SPN.

Derbishire, J. (2007). *Posedlost prvočísly.* Praha: Academia.

Devlin, K. (2002). *Jazyk matematiky.* Praha: Argo a Dokořán.

Dobrovolný B. (1969). *Matematická rekreace.* Praha: Práce.

Gahér, F. (1996). *Logické hádanky, hlavolamy a paradoxy.* Bratislava: Iris.

Goga, M. (1992). *Vieš? Uhádneš? Lamohlavy.* Bratislava: Videopress.

Hriňák, M. a kol. (2008). *Netradičné metódy vo vyučovaní matematiky 2.* Bratislava: Metodicko–pedagogické centrum.

Leacock, S. (1986). *Literární poklesky.* Praha: Mladá Fronta.

Loukota, J. (1998). *Veselá matematika.* Olomouc: Votobia.

Mareš, M. (2008). *Příběhy matematiky.* Příbram: Pistorius a Olšanská.

Novoveský, Š., Križalkovič, K. a Lečko, I. (1974). *777 matematických zábaviek a hračiek.* Bratislava: SPN.

Pappasová, T. (1997). *Potešenie z matematiky.* Bratislava: Nebojsa.

Pereľman, J. I. (1978). *Živaja matematika.* Moskva: Nauka.

Rosenthal, J. S. (2008). *Zasažen bleskem.* Praha: Academia.

Seife, Ch. (2005). *Nula.* Praha: Dokořán a Argo.

Singh, S. (2002). *Velká Fermatova věta.* Praha: Academia.

Trejbal, J., Filip, Š., Kučinová, E. a Mäsiar, P. (1993). *Zbierka úloh z matematiky pre 7. ročník základných škôl.* Bratislava: SPN.

Ziegler, G. M. (2011). *Matematika vám to spočítá.* Praha: Euromedia Group.

časopisy:

Autor neuvedený (1978). Hrátky s kalkulátory. *Věda a technika mládeži*, **32**, č. 2, str. 40.

Bálint, V. (2009). 50. Medzinárodná matematická olympiáda, Brémy, Nemecko. *Obzory matematiky, fyziky a informatiky*, **38**, č. 3, str. 67–72.

Balková, Ľ., Bekrová, M. a Lukeš, J. (2010). Jeden za osmnáct a druhý bez dvou za dvacet aneb záporné cifry v zápisu čísel. *Rozhledy matematicko–fyzikální*, **85**, č. 4, str. 3–11.

Baník, I. a Baník, R. (1997). Keď príčinou zrážky dvoch lodí bola neznalosť fyzikálnych zákonov. *Obzory matematiky, fyziky a informatiky*, **26**, č. 49, str. 50–51.

Calda, E. (2005). Nepořádky. *Učitel matematiky*, **13**, č. 3, str. 170–173.

Calda, E. (2006). Jedna nevýchovná úloha, kterou si čtenář snadno vyřeší. *Učitel matematiky*, **14**, č. 4, str. 254–256.

Calda, E. (2009). Umíte sčítat přirozená čísla? *Rozhledy matematicko–fyzikální*, **48**, č. 1, str. 48–52.

Hrubý, D. (2004). Turbodidaktika 1. *Učitel matematiky*, **12**, č. 2, str. 60–64.

Jančařík, A. (2007). Početní algoritmy II – násobení. *Učitel matematiky*, **15**, č. 2, str. 72–78.

Jedinák, D. (2007). Percentá sú zradné čísla pomerné. *Rozhledy matematicko–fyzikální*, **82**, č. 2, str. 51–53.

Mäsiar, P. (1989). Keď zlyhá sedliacky rozum. *Matematika a fyzika ve škole*, **20**, č. 4, str. 242–243.

Pelantová, E. a Znojil, M. (2010). Můžeme věřit své vlastní kalkulačce? *Rozhledy matematicko–fyzikální*, **85**, č. 4, str. 11–18.

PIŤHA, P. (2008). Velká iluze českého školství. *Učitel matematiky*, **16**, č. 4, str. 231–242.

SOMORČÍK, A. (1993). 222 problematických tehál. *Matematika – fyzika – informatika*, **2**, č. 5, str. 271–272.

SOMORČÍK, A. (1994). Vyznanie cez terminál. *Matematika – fyzika – informatika*, **3**, č. 3, str. 163–164.

TLUSTÝ, P. (2001). Paradoxní příklady z pravděpodobnosti, *Učitel matematiky*, **10**, č. 1, str. 37–42.

internetové zdroje:

PICK, L. (2010). Hrášek a sluníčko. *Prednáška na VŠB Ostrava, 9. 11. 2010.* http://homel.vsb.cz/~vod03/osma/pdf/prednasky/2010/Banach_Tarskii.pdf

ŤEŽKÁ, Š. (2007). Matematické a logické paradoxy. *Seminárna práca na Gymnáziu Cheb*. http://absolventi.gymcheb.cz/2008/sttezka/cssmatika/matika.html

Príloha

Ilustruje záujem mojich žiakov o matematiku (fyziku) a výsledky, ktoré v týchto predmetoch dosiahli.

VÝSLEDKOVÝ LIST ŠKOLY

Celoslovenské testovanie žiakov 9. ročníka ZŠ
Testovanie 9-2012

Kód školy: **540504** *Základná škola, Školská 1158, 95131 Močenok*

Základné údaje	**MAT**	**SJL**
Počet žiakov testovaných z daného predmetu:	*43*	*43*
Priemerný počet bodov školy:	*14,37*	*15,28*
Priemerná percentuálna úspešnosť školy:	*71,86 %*	*61,12 %*
Percentil školy:	*91,51*	*81,56*
Priemerná známka žiakov školy:	*2,51*	*2,19*
Priemerný počet bodov v rámci SR:	*11,51*	*13,62*
Priemerná percentuálna úspešnosť v rámci SR:	*57,54 %*	*54,47 %*

NÚCEM - Celoslovenské testovanie žiakov 9. ročníka ZŠ - Testovanie 9-2012

NUPSESO®, a. s.
10. apríl 2012

Výsledková listina 46. roč. OK FO šk.r. 2004/2005 kat. E - okr. Šaľa

P.č.	Meno a priezvisko	Škola	Vyučujúci	Body 1.	2.	3.	4.	Sp.	Ú/N
1.	Monika Hanáková	ZŠ Močenok	Mgr. Anton Somorčík	8	10	10	10	38	Ú
2.	Róbert Németh	ZŠ s VJM Tešedíkovo	Mgr.Margita Jánošková	10	8	10	8	36	Ú
3.	Gorazd Kohút	ZŠ Močenok	Mgr. Anton Somorčík	10	10	10	5	35	Ú
4.	Miroslav Molnár	ZŠ Močenok	Mgr. Anton Somorčík	10	10	10	2	32	Ú
5.	Lukáš Lenčéš	ZŠ Močenok	Mgr. Anton Somorčík	3	10	5	10	28	Ú
6.	Barnabás Forró	ZŠ s VJM Šaľa	Mgr. Ildikó Mézsárosová	9	10	0	4	23	Ú
7.	Vincent Mészáros	ZŠ s VJM Šaľa	Mgr. Ildikó Mézsárosová	10	10	0	3	23	Ú
8.	Tomáš Kurucz	ZŠ Pionierska ul. Šaľa		4	0	10	2	16	N
9.	Eva Mészárosová	ZŠ s VJM Šaľa		1	10	1	4	16	N
10.	Adrián Baranyay	ZŠ s VJM Žihárec		6	4	0	3	13	N
11.	Dávid Ferencei	ZŠ s VJM Šaľa		2	10	0	1	13	N
12.	Naďa Štolcová	ZŠ Pionierska ul. Šaľa		0	10	0	0	10	N
13.	Ivan Petrušek	ZŠ Pionierska ul. Šaľa		2	3	0	1	6	N
14.	Pavol Kollár	G J. Fándlyho Šaľa		0	2	0	0	2	N
15.	Marek Kudrna	G J. Fándlyho Šaľa		0	0	1	1	2	N
16.	Oliver Vágó	G J. Fándlyho Šaľa		0	0	2	0	2	N
17.	Martin Petro	ZŠ J. Murgaša Šaľa		1	0	0	0	1	N

46. ročník Fyzikálnej olympiády
Krajské kolo kategórie E

V ý s l e d k o v á l i s t i n a

Poradie	Priezvisko a meno	Ročník	Š k o l a	Vyučujúci	Ú l o h y 1	2	3	4	Body spolu
Víťazi súťaže									
1.-2.	Letko Tomáš	9.	ZŠ O. Cabana, Komjatice	Mgr. Jozef Huček	10	10	10	10	40
1.-2.	Kohút Gorazd	9.	ZŠ Močenok	Mgr. Anton Somorčík	10	10	10	10	40
3.	Lami Dávid	9.	ZŠ s VJM Chotín	Mgr. Jankó Emma	10	10	10	9	39
Ďalší úspešní riešitelia									
4.	Gajdoš Jozef	9.	ZŠ J. V. Šimka, Žitavany	Mgr. Helena Kuťková	10	10	8	10	38
5.-7.	Molnár Miroslav	9.	ZŠ Močenok	Mgr. Anton Somorčík	10	7	10	10	37
5.-7.	Jaszkó Melinda	9.	ZŠ s VJM Sokolce	Mgr. Bajcsi Barnabás	10	7	10	10	37
5.-7.	Abaffy Matúš	IV.	Gymnázium, Golianova ul. NR	Mgr. Eva Činčurová	10	7	10	10	37
8.	Pásztor Bálint	9.	ZŠ s VJM Šahy	Mgr. Helena Kozová	10	10	10	6	36
9.-12.	Szabó Peter	9.	ZŠ Imeľ	Mgr. Ervín Zachar	10	5	10	10	35
9.-12.	Slivoňová Martina	9.	ZŠ Kalná nad Hronom	Mgr. E. Gregušová	10	5	10	10	35
9.-12.	Kraus Pavel	9.	Cirkevná ZŠ, Lipová, Topoľčany	Ing. Tkadlec Jozef	10	10	10	5	35
9.-12.	Babinec Adam	9.	ZŠ Mostná, Nové Zámky	RNDr. Darina Kuttnerová	10	6	9	10	35
13.-14.	Halász Róbert	9.	ZŠ s VJM Eötvösa, Komárno	Mgr. Kalmár Imre	10	3	10	10	33
13.-14.	Gőgh Adrián	9.	ZŠ s VJM Palkovicha, Kolárovo	Mgr. Balogh László	10	10	8	5	33
15.-18.	Segéňová Mária	9.	ZŠ Krčméryho, NR	Mgr.Margita Brezinová	10	9	10	3	32
15.-18.	Kartai Klaudia	9.	ZŠ s VJM, Ul. práce, Komárno	Mgr. Szakáll Krisztína	10	5	9	8	32
15.-18.	Justus Ivan	IV.	8. roč. gymn. Topoľčany	RNDr. Pavol Valach	10	7	9	6	32
15.-18.	Bóna Zoltán	9.	ZŠ s VJM Bátorové Kosihy	Mgr. Dolník Judit	10	10	9	3	32
19.-20.	Chrien Tomáš	IV.	Gymnázium Levice	Mgr. Zuzana Klaudíniová	10	8	10	3	31
19.-20.	Balogh Tomáš	9.	ZŠ Nábrežná, Nové Zámky		10	2	10	9	31
21.-22.	Oroszlány Loránt	9.	ZŠ s VJM Adyho, Štúrovo	Mgr. Zuzana Fodorová	10	9	8	3	30
21.-22.	Ondruš Martin	IV.	Gymnázium, Golianova ul. NR	Mgr. Eva Činčurová	9	8	10	3	30
23.-26.	Zeman Lukáš	IV.	Gymnázium Levice	Mgr. Zuzana Klaudíniová	9	8	10	1	28
23.-26.	Németh Róbert	9.	ZŠ s VJM, Tešedíkovo	Mgr. Margita Jánošková	10	6	6	6	28
23.-26.	Hrabovský Pavol	9.	ZŠ Komenského, Komárno	Mgr. Aneta Kamocsaiová	4	9	10	5	28
23.-26.	Forró Barnabás	9.	ZŠ s VJM P. Pazmánya, Šaľa	Mgr.Ildikó Mészárosová	10	2	10	6	28
27.-29.	Pohánka Juraj	9.	ZŠ Levice, J. Jesenského 41	Mgr. Ernest Štugel	10	5	2	10	27
27.-29.	Mézes Mátyás	9..	ZŠ s VJM, Želiezovce	Mgr. Karol Pólya	10	7	8	2	27
27.-29.	Greguš Lukáš	9.	ZŠ Čakajovce	Mgr. Mário Tantoš	10	5	7	5	27
30.	Meszáros Vincent	9.	ZŠ s VJM P. Pazmánya, Šaľa	Mgr.Ildikó Mészárosová	10	4	9	3	26
31.-32.	Lenčéš Lukáš	9.	ZŠ Močenok	Mgr. Anton Somorčík	10	6	7	2	25
31.-32.	Laczkó Patrik	9.	ZŠ Mostná, Nové Zámky	RNDr. Darina Kuttnerová	10	3	2	10	25
33.	Mančík Gabriel	9.	ZŠ Levice, M.R. Štefánika 34	Mgr. E. Zelienková	10	5	6	3	24
34.	Ligač Filip	IV.	Gymnázium, Golianova ul. NR	Mgr. Eva Činčurová	4	6	8	5	23
35.-36.	Zajíčková Kristína	9.	ZŠ O. Cabana, Komjatice	Mgr. Jozef Huček	0	2	10	10	22
35.-36.	Tarina Michal	IV.	8. roč. gymn. Topoľčany	RNDr. Pavol Valach	4	10	5	3	22
37.	Naštická Zuzana	9.	ZŠ Kalná nad Hronom	Mgr. E. Gregušová	0	8	10	3	21
38.	Ivan Kitti	9.	ZŠ s VJM Zemianska Olča	Mgr. Bartal Erzsébet	4	5	9	2	20
39.	Juhász Tibor	9.	ZŠ s VJM Palkovicha, Kolárovo	Mgr. Balogh László	0	5	10	3	18
40.	Hanáková Monika	9.	ZŠ Močenok	Mgr. Anton Somorčík	0	6	8	3	17
41.	Vörös Zoltán	9.	ZŠ s VJM G. Czuczora, NZ	Mgr. Zahorán Judit	4	3	6	3	16
42.	Suchetková Mária	9.	ZŠ s VJM, Šahy	Mgr. Helena Kozová	0	1	10	4	15

Vyhodnotenie okresného kola 48. ročníka FO - kategória E

školský rok 2006/2007

				Body					
P.č	**Meno a priezvisko**	**Škola**	**Vyučujúci**	**1.**	**2.**	**3.**	**4.**	**spolu**	**Umiestnenie**
1.	Leššová Lívia	ZŠ Močenok	Mgr.A. Somorčík	10	10	4	10	34	1. miesto
2.	Varga Mátyás	ZŠ s VJM Tešedíkovo	Mgr. F. Zilizi	9	10	5	10	34	1. miesto
3.	Ištokovičová Petra	ZŠ Močenok	Mgr.A. Somorčík	10	10	3	10	33	3. miesto
4.	Báanová Natália	ZŠ s VJM Pázmánya, Šaľa	Mgr. I. Mészárosová	9	10	3	10	32	4. miesto
5.	Aláč Peter	Gymnázium J. Fándlyho, Šaľa	Mgr.T. Urbanová	8	9	4	10	31	ÚR
6.	Karlubíková Iveta	ZŠ Močenok	Mgr.A. Somorčík	8	10	3	10	31	ÚR
7.	Lenčéš Richard	ZŠ Močenok	Mgr.A. Somorčík	8	10	3	10	31	ÚR
8.	Vörösová Lucia	ZŠ Močenok	Mgr.A. Somorčík	7	10	4	10	31	ÚR
9.	Jóža Ján	ZŠ Bernolákova, Šaľa	Mgr. Z. Kovácsová	6	8	6	10	30	ÚR
10.	Balogh Matúš	ZŠ J.Murgaša, Šaľa	Mgr. V.Rampašeková	8	10	1	10	29	ÚR
11.	Zsáková Tünde	ZŠ s VJM Pázmánya, Šaľa	Mgr. I. Mészárosová	5	10	3	10	28	ÚR
12.	Packová Andrea	ZŠ Močenok	Mgr.A. Somorčík	9	5	2	10	26	ÚR
13.	Mészárosová Lucia	ZŠ J.Murgaša, Šaľa	Mgr. V.Rampašeková	8	10	2	4	24	ÚR
14.	Šagátová Martina	ZŠ Pionierska, Šaľa	Mgr.A. Magáthová	10	1	3	10	24	ÚR
15.	Révay Boris	ZŠ Močenok	Mgr.A. Somorčík	3	5	2	10	20	ÚR
16.	Lišková Ivana	ZŠ J.Murgaša, Šaľa	Mgr. V.Rampašeková	4	6	2	6	18	ÚR
17.	Vassová Anita	ZŠ s VJM Pázmánya, Šaľa	Mgr. I. Mészárosová	4	6	2	5	17	ÚR
18.	Galavec Norbert	Gymnázium J. Fándlyho, Šaľa	Mgr.T. Urbanová	9	1	1	5	16	ÚR
19.	Ondrašina Juraj	ZŠ Krátka, Šaľa	Mgr.K.Keszelyová	8	1	1	6	16	ÚR
20.	Lenčéš Michal	ZŠ Bernolákova, Šaľa	Mgr. Z. Kovácsová	0	0	2	2	4	NR

Krajská komisia Fyzikálnej olympiády v Nitre

48. ročník Fyzikálnej olympiády
3. kolo kategórie E

V ý s l e d k o v á   l i s t i n a

Poradie	Priezvisko a meno	Ročník	Š k o l a	Vyučujúci	
Víťazi súťaže					
1.	Mikó Albert	9.	ZŠ s VJM Levice, Dopravná ul.	E. Paterková	
2.	Morvay Tomáš	9.	ZŠ s VJS, Veľký Kýr	Mgr. Štefan Veres	
3.-4.	Štrbová Silvia	IV.	G Nitra, Párovská ul.	Mgr. Dušan Hozlár	
3.-4.	Leššová Lívia	9.	ZŠ Močenok	Mgr. A. Somorčík	
Ďalší úspešní riešitelia					
5.	Tomková Juliana	9.	ZŠ O. Cabana s MŠ, Komjatice	Mgr. Mária Hučeková	
6.	Izsóf Máté	9.	ZŠ s VJM Sokolce	Mgr. Barnabás Bajcsi	
7.	Vörösová Lucia	9.	ZŠ Močenok	Mgr. A. Somorčík	
8.	Tóth Árpád	9.	ZŠ s VJM Sokolce	Mgr. Barnabás Bajcsi	
9.	Jankovič Radovan	9.	ZŠ Levice, J. Jesenského 41	Mgr. E. Štugel	
10.-11.	Varga Mátyás	9.	ZŠ s VJM Tešedíkovo	Mgr. F. Zilizi	
10.-11.	Konč Juraj	9.	ZŠ Komárno, Komenského ul.	Mgr. Aneta Kamocsaiová	
12.-13.	Majzlík Martin	IV.	G A. Vrábla, Levice	Mgr. Z. Klaudíniová	
12.-13.	Zsemlye Vincent	9.	ZŠ Komárno, Rozmarínová ul	Mgr. Ľubica Kováčová	
14.-15.	Macák Martin	IV.	G Šurany	RNDr. Soňa Štefániková	
14.-15.	Manduchová Katarína	9.	ZŠ Topoľčany, Tríbečská ul.	Mgr. Zlatica Pavlovičová	
16.	Kenderová Veronika	9.	ZŠ K-Thegeho, Hurbanovo	Mgr. Marta Kóňová	
17.	Berecz Tomáš	9.	ZŠ Nitra, Nábrežie mládeže	Mgr. Helena Koprdová	
18.	Szabó Gergely	9.	ZŠ s VJM Levice, Dopravná ul.	E. Paterková	
19.-20.	Mészáros Dušan	9.	ZŠ Nové Zámky, G. Bethlena	RNDr. Helena Lelovská	
19.-20.	Žáčik Šimon	9.	ZŠ Nitra, Krčméryho ul.	PaedDr. Margita Brezinová	
21.-23.	Oravcová Jana	9.	ZŠ Nitra, Nábrežie mládeže	Mgr. Helena Koprdová	
21.-23.	Nichta Martin	IV.	G A. Vrábla, Levice	Mgr. Z. Klaudíniová	
21.-23.	Aláč Peter	IV.	G J. Fándlyho, Šaľa	Mgr. T. Urbanová	
24.-25.	Magyarová Eva	IV.	G Nitra, Párovská ul.	Mgr. Dušan Hozlár	
24.-25.	Grman Erik	9.	ZŠ s MŠ Preseľany	PaedDr. Andrea Gubová	
26.	Rácz Ágnes	9.	ZŠ s VJM Sokolce	Mgr. Barnabás Bajcsi	
27.-29.	Valíček Šimon	9.	ZŠ Nitra, Nábrežie mládeže	Mgr. Helena Koprdová	
27.-29.	Bogyo Marek	9.	ZŠ s MŠ Vráble, Lúky	Mgr. Mária Lukáčová	
27.-29.	Ištokovičová Petra	9.	ZŠ Močenok	Mgr. A. Somorčík	
30.	Križan Michal	9.	ZŠ Nitra, Krčméryho ul.	PaedDr. Margita Brezinová	
31.	Perec René	9.	ZŠ Topoľčany, Škultétyho ul.	Mgr. Štefan Smolinský	
32.-36.	Melíšek Ľubomír	9.	ZŠ Nové Zámky, Nábrežná ul.	Mgr. Iveta Barusová	
32.-36.	Karlubíková Iveta	9.	ZŠ Močenok	Mgr. A. Somorčík	
32.-36.	Lenčéš Richard	9.	ZŠ Močenok	Mgr. A. Somorčík	
32.-36.	Urminská Lívia	9.	ZŠ Nové Zámky, G. Bethlena	Mgr. Iveta Rajčániová	
32.-36.	Izsák Dávid	9.	ZŠ s VJM Kolárovo, Ul. Palkovicha	Mgr. László Balogh	

Výsledková listina - OK MO kat. Z9 Šaľa 23.01.2008

Školský rok 2007/2008 **Miesto: ZŠ Jozefa Murgaša Horná 22 Šaľa**

P.č.	Meno a priezvisko	Škola	U1	U2	U3	U4	Spolu	U/N	Poradie
8.	Štefan Lenický	ZŠ Močenok	6	6	4	6	22	Ú	1
7.	Marián Horňák	ZŠ Močenok	6	6	0	6	18	Ú	2
24.	František Tóth	ZŠ s VJM Žihárec	6	6	0	6	18	Ú	2
19.	Miriama Bendeová	ZŠ s VJM Diakovce	6	5	0	6	17	Ú	4
15	Eniko Hajduová	ZŠ s VJM P.Pázmanya,Šaľa	6	0	0	3	9	N	
14.	Erik Rakota	ZŠ Tešedíkovo	6	1	0	1	8	N	
1.	Mariana Takáčová	ZŠ J.Murgaša,Šaľa	6	0	0	1	7	N	
9.	Bohuš Vereš	ZŠ Horná Kráľová	6	0	0	1	7	N	
11.	Dominika Hrobárová	ZŠ Trnovec n/Váhom	6	0	0	1	7	N	
12.	Lucia Gofjarová	ZŠ Trnovec n/Váhom	6	0	0	1	7	N	
20.	Kristián Szalay	ZŠ s VJM Vlčany	6	1	0	0	7	N	
23.	Zoltán Palágyi	ZŠ s VJM Žihárec	1	0	0	6	7	N	
3.	Soňa Minarechová	Gymnázium J.Fándlyho,Šaľa	3	1	0	2	6	N	
16.	Réka Takácsová	ZŠ s VJM P.Pázmanya,Šaľa	6	0	0	0	6	N	
6.	Dominika Dianová	ZŠ Močenok	3	1	0	1	5	N	
10.	Gabriel Takács	ZŠ Trnovec n/Váhom	2	2	0	1	5	N	
5.	Petronela Grausová	Gymnázium J.Fándlyho,Šaľa	2	1	0	1	4	N	
13.	Bálint Domonkos	ZŠ Tešedíkovo	2	1	0	1	4	N	
17.	Dóra Puterová	ZŠ s VJM P.Pázmanya,Šaľa	2	1	0	1	4	N	
18.	Alexandra Darázsová	ZŠ s VJM Diakovce	2	0	1	1	4	N	
2.	Mária Bujdáková	ZŠ J.Murgaša,Šaľa	2	0	0	1	3	N	
4.	Michaela Rybárová	Gymnázium J.Fándlyho,Šaľa	2	0	0	1	3	N	
21.	Timea Jancsóová	ZŠ s VJM Vlčany	2	0	1	0	3	N	
22.	Norbert Mészáros	ZŠ s VJM Žihárec	2	0	0	0	2	N	

Poradia MO, 57. ročník (školský rok 2007/2008)

obvodné kolo | krajské kolo | celoštátne kolo | výberové sústredenie | CPS | IMO | MEMO

kraj: BA BB KE NR PO TN TT ZA

kategória: A B C Z9

krajské kolo, kategória Z9, kraj Nitra (adresa na zdieľanie: http://skmo.sk/poradia.php?jazyk=sk&rocnik=57&sutaz=

	meno	ročník, škola		1.	2.	3.	4.	∑	pripravil
				úspešní riešitelia					
1.	Marián Horňák	9.	ZŠ Školská, Močenok	6	6	6	4	**22**	Somorčík
2.	Martin Zajiček	9.	ZŠ Nám. O. Cabana, Komjatice	4	4	6	6	**20**	Švecová
3.	Ferenc Farkaš	9.	ZŠ Hlavná, Sokolce	1	4	6	6	**17**	Bajcsi
4.	Matúš Falis	9.	G. A. Vrábla, Levice	6	2	4	4	**16**	Korčeková
5.	Viktor Babinec	9.	ZŠ G. Bethlena, Nové Zámky	6	4	3	2	**15**	Jonáš
	Lukáš Béreš	9.	ZŠ Školská, Tlmače	6	1	4	4	**15**	Malá
7.	Terézia Končová	9.	ZŠ Komenského, Komárno	6	0	2	6	**14**	Varga
	Tünde Tarcsiová	9.	ZŠ F. Móru, Zemianska Olča	4	0	6	4	**14**	Mayerová
9.	Martin Švolík	9.	ZŠ Krčméryho, Nitra	6	0	3	4	**13**	Adamová
10.	Jozef Agárdy	9.	ZŠ Školská, Levice	0	6	3	3	**12**	Krišková
	Juraj Karlubík	9.	G. Golianova, Nitra	6	0	2	4	**12**	Földesiová
	Matyás Mihálka	9.	ZŠ s VJM, Štúrovo	6	2	2	2	**12**	Muszka
	Michaela Šimiaková	9.	ZŠ Cabajská, Nitra	6	0	4	2	**12**	Lörinczová
	Tomáš Veškrna	9.	ZŠ Pri Podlužianke, Levice	2	0	5	5	**12**	Hlinčíková
				ostatní riešitelia					
15.	Martin Biely	9.	ZŠ J. Jesenského, Levice	0	4	2	4	**10**	
	Éva Édes	9.	ZŠ Cesta na vŕšku, Marcelová	0	6	0	4	**10**	
	Šimon Evin	9.	ZŠ Pri Podlužianke, Levice	6	0	0	4	**10**	
	Martin Kocmánek	9.	ZŠ Štiavnická cesta, Pukanec	6	0	0	4	**10**	
	Dalibor Mészáros	9.	ZŠ Mostná, Nové Zámky	5	0	3	2	**10**	
	Jakub Pavčo	9.	G. A. Vrábla, Levice	6	0	0	4	**10**	
	Matúš Tóth	9.	G. Párovská, Nitra	6	0	2	2	**10**	
22.	Matúš Kalužák	9.	ZŠ Nám. O. Cabana, Komjatice	0	0	5	4	**9**	
	László Mázik	8.	ZŠ Práce, Komárno	1	1	5	2	**9**	
	Tomáš Szabó	9.	ZŠ Mierová, Želiezovce	5	0	0	4	**9**	
25.	Miriama Bendeová	9.	ZŠ s VJM, Diakovce	6	0	0	2	**8**	
	Tomáš Paulík	9.	ZŠ Nábrežná, Nové Zámky	6	0	0	2	**8**	
27.	Štefan Lenický	9.	ZŠ Školská, Močenok	0	0	3	4	**7**	
	Jozef Major	9.	ZŠ Š. Moysesa, Tesárske Mlyňany	1	1	3	2	**7**	
29.	Klaudia Babišová	9.	ZŠ Cesta na vŕšku, Marcelová	0	0	6	0	**6**	
	Veronika Ballová	9.	ZŠ Nám. Konkolyho-Thege, Hurbanovo	0	0	2	4	**6**	
	Anikó Kuklis	9.	ZŠ s VJM, Štúrovo	0	0	2	4	**6**	

Vyhodnotenie okresného kola 49. ročníka FO – kategória E, okres Šaľa
Školský rok 2007/2008

P.č.	Meno a priezvisko	Škola	vyučujúci	Body 1.	2.	3.	4.	spolu	Umiestnenie
1.	Marián Horňák	ZŠ Močenok	Mgr. Anton Somorčík	10	10	8	10	38	1.
2.	Kristína Mináriková	ZŠ Močenok	Mgr. Anton Somorčík	10	10	1	10	31	2.
3.	Štefan Lenický	ZŠ Močenok	Mgr. Anton Somorčík	10	8	8	4	30	3.
4.	Mirka Prváková	ZŠ Močenok	Mgr. Anton Somorčík	10	6	1	10	27	ÚR
5.	Zoltán Palágyi	ZŠ s VJM Žihárec	Mgr. František Czuczor	10	10	0	6	26	ÚR
6.	Gabriel Takács	ZŠ s MŠ Trnovec nad Váhom	Mgr. Eva Štangová	10	6	0	10	26	ÚR
7.	Enikő Hajdúová	ZŠ s VJM P. Pázmánya, Šaľa	Mgr. Ildikó Mészárosová	6	8	0	10	24	ÚR
8.	Norbert Mészáros	ZŠ s VJM Žihárec	Mgr. František Czuczor	10	3	1	9	23	ÚR
9.	Dóra Puterová	ZŠ s VJM P. Pázmánya, Šaľa	Mgr. Ildikó Mészárosová	10	3	0	10	23	ÚR
10.	Réka Takácsová	ZŠ s VJM P. Pázmánya, Šaľa	Mgr. Ildikó Mészárosová	5	4	0	10	19	ÚR
11.	František Tóth	ZŠ s VJM Žihárec	Mgr. František Czuczor	10	1	0	4	15	ÚR
12.	Jaroslav Fábik	ZŠ Bernolákova, Šaľa	Mgr. Zuzana Kovácsová	4	1	1	6	12	NR
13.	Tibor Rábek	ZŠ s MŠ Horná Kráľová	Mgr. Miriam Bírová	8	2	0	0	10	NR
14.	Bohuš Vereš	ZŠ s MŠ Horná Kráľová	Mgr. Miriam Bírová	8	0	0	0	8	NR
15.	Martin Zabák	ZŠ s MŠ Horná Kráľová	Mgr. Miriam Bírová	6	1	0	0	7	NR
16.	Matúš Rábek	ZŠ s MŠ Horná Kráľová	Mgr. Miriam Bírová	6	0	0	0	6	NR
17.	Andrea Kuruczová	ZŠ Bernolákova, Šaľa	Mgr. Zuzana Kovácsová	0	2	0	0	2	NR
18.	Kristína Hátašová	ZŠ Bernolákova, Šaľa	Mgr. Zuzana Kovácsová	0	0	0	0	0	NR

Krajská komisia Fyzikálnej olympiády v Nitre

49. ročník Fyzikálnej olympiády
3. kolo kategórie E

V ý s l e d k o v á   l i s t i n a

Poradie	Priezvisko a meno	Ročník	Š k o l a	Vyučujúci	Ú l o h y 1	2	3	4	Body spolu
Víťazi súťaže									
1.-4.	Kocmánek Martin	9.	ZŠ Pukanec	Ing. Marta Ďurovičová	10	10	10	10	40
1.-4.	Potočár Radovan	IV.	G A. Vrábla, Levice	Mgr. Zuzana Klaudíniová	10	10	10	10	40
1.-4.	Zajíček Martin	9.	ZŠ O. Cabana s MŠ, Komjatice	Mgr. Mária Hučeková	10	10	10	10	40
1.-4.	Horňák Marián	9.	ZŠ Močenok	Mgr. Anton Somorčík	10	10	10	10	40
Ďalší úspešní riešitelia									
5.	Magdinová Hana	9.	ZŠ Nitra, Topoľová ul.	Mgr. Mária Novoveská	10	8	10	10	38
6.	Kalužák Matúš	9.	ZŠ O. Cabana s MŠ, Komjatice	Mgr. Mária Hučeková	10	7	10	10	37
7.	Lenický Štefan	9.	ZŠ Močenok	Mgr. Anton Somorčík	8	9	10	9,5	36,5
8.-9.	Farkas Ferenc	9.	ZŠ s VJM Sokolce	Mgr. Barnabás Bajcsy	10	10	10	5	35
8.-9.	Bujna Pavol	9.	ZŠ Topoľčany, Lipová ul.	Ing. Jozef Tkadlec	10	10	10	5	35
10.	Lipták Juraj	9.	ZŠ Komárno, Komenského ul.	Mgr. Aneta Kamocsaiová	5	10	10	9,5	34,5
11.-13.	Ódor Éva	IV.	G H. Selyeho s VJM Komárno	Mgr. István Sebő	10	10	10	4	34
11.-13.	Peniaško Filip	9.	ZŠ Želiezovce	Mgr. Marta Bugárová	10	9	5	10	34
11.-13.	Hudec Roman	IV.	Gymnázium Nové Zámky	Mgr. Iveta Barusová	10	9	10	5	34
14.	Molnár Andrea	9.	ZŠ s VJM Sokolce	Mgr. Barnabás Bajcsy	10	7	6	10	33
15.	Poprac Martin	9.	ZŠ Šurany, SNP 5	Mgr. Anna Laurová	2	10	10	10	32
16.	Kuklisová Anikó	9.	ZŠ s VJM Štúrovo	Mgr. Zuzana Fodorová	5	10	10	5	30
17.-18.	Béreš Lukáš	9.	ZŠ Tlmače	Ing. Ábelovská	1	8	10	10	29
17.-18.	Mináriková Kristína	9.	ZŠ Močenok	Mgr. Anton Somorčík	5	9	10	5	29
19.-20.	Majerčík Michal	9.	ZŠ Nitra, Nábrežie mládeže	Mgr. Helena Koprdová	10	8	4	5	27
19.-20.	Valach Sebastián	9.	ZŠ Zlaté Moravce, Pribinova ul	PaedDr. Sylvia Halgašová	10	10	2	5	27
21.-22.	Balogh Enikő	9.	ZŠ s VJM Marcelová	Mgr. Mária Csudai	4	10	10	2	26
21.-22.	Édes Éva	9.	ZŠ s VJM Marcelová	Mgr. Mária Csudai	0	10	10	6	26
23.	Dolinský Jakub	9.	ZŠ Topoľčany, Škultétyho ul.	Mgr. Štefan Smolinský	3	0	10	10	23
24.-25.	Kiss Tünde	IV.	GHS s VJM Komárno	Mgr. István Sebő	0	10	10	0	20
24.-25.	Tóth Ádám	9.	ZŠ s VJM Želiezovce	Mgr. Karol Pólya	10	2	8	0	20
26.27.	Vnuk Andrej	IV.	G. Šurany, Bernolákova 37	Mgr. Kutálková	7	10	0	2	19
26.27.	Švantner Tomáš	9.	ZŠ Nové Zámky, Mostná ul.	PaedDr. Mária Priesterová	5	7	2	5	19
28.-29.	Tóth Attila	9.	ZŠ s VJM M. Korvina, Kolárovo		6	4	2	5	17
28.-29.	Hlavatý Peter	9.	ZŠ Nové Zámky, Mostná ul.	PaedDr. Mária Priesterová	5	10	0	2	17
30.	Solárová Dominika	9.	ZŠ Topoľčianky	RNDr. Anna Ulianková	1	10	2	2	15
Ďalší riešitelia									
31.	Bacho Adam	9.	ZŠ G. Bethlena Nové Zámky	Mgr. Iveta Rajčániová	1	10	0	3	14
32.-33.	Stranovská Michaela	9.	PG sv. J. Kalazanského, Nitra	Mgr. Veronika Štefániková	1	10	0	2	13
32.-33.	Prváková Mirka	9.	ZŠ Močenok	Mgr. Anton Somorčík	2	4	3	4	13
34.	Rigó Juraj	9.	ZŠ G. Bethlena Nové Zámky	Mgr. Iveta Rajčániová	0	2	0	2	4

VÝSLEDKOVÁ LISTINA

Podujatie: **Celoštátne kolo Pytagoriády, kategória P7**
Dátum, miesto: **9. – 10. 6. 2011, Bratislava**

Poradie	Priezvisko a meno	Škola	Žiaka pripravoval	Čiastkové body: Body za úlohy	Čiastkové body: Body za čas	Body spolu
1	Petráš Peter Pavel Arthur	ZŠ, Tribečská 22, Topoľčany	D. Jedinák	19,0	11,0	**30,0**
2	Andruskó Krisztina	ZŠ s VJM, Eötvösa 39, Komárno	E. Andruskó	18,0	12,0	**30,0**
3	Andruskó Zoltán	ZŠ s VJM, Eötvösa 39, Komárno	E. Andruskó	17,0	11,0	**28,0**
4	Pszota Máté	ZŠ Bélu Bartóka s VJM, Bratislavaská 38, Veľký Meder		17,0	10,0	**27,0**
5	Semaňák Patrik	ZŠ, Dr. Daniela Fischera 2, Kežmarok	L. Bobíková	13,0	13,0	**26,0**
6	Novelinka Samuel	ZŠ Močenok, Školská 1158, Močenok	A. Somorčík	13,0	12,0	**25,0**
7	Cvečková Mária	ZŠ, Záhorácka 919, Borský Mikuláš	V. Šajdíková	13,0	9,0	**22,0**
8	Dragúň Peter	ZŠ, Krymská 5, Michalovce		12,0	8,0	**20,0**
8	Pajerský Martin	ZŠ, Jilemnického 2, Žiar nad Hronom	B. Želiarová	12,0	8,0	**20,0**
10	Németh Friderika	ZŠ s VJM, Hlavná 193, Orechová Potôň	F. Németh	11,0		**11,0**

Výsledková listina

OK MO Šaľa 25.1.2012

Kat.Z9

por.č.	meno a priezvisko	škola	u1	u2	u3	u4	spolu	u/n	poradie
5	Erik Kelemen	ZŠ,Bernolákova, Šaľa	6	6	6	6	24	U	1
18	Jessica Konderková	ZŠ s VJM , Žihárec	6	6	5	6	23	U	2
7	Samuel Novelinka	ZŠ, Močenok	0	6	6	3	15	U	3
6	Patrícia Dianová	ZŠ, Močenok	6	6	1	0	13	U	4
1	Adam Juráš	ZŠ a MŠ J.Murgaša, Šaľa	1	4	6	1	12	U	5
2	Miroslav Podhora	ZŠ J.C.Hronského, Šaľa	0	6	6	0	12	U	5
16	Margaréta Lelovicsová	ZŠ a MŠ s VaVJM P.Pázmanya, Šaľa	0	6	6	0	12	U	5
3	Ivana Pápayová	ZŠ J.C.Hronského, Šaľa	1	6	2	0	9	N	
15	Tamara Százová	ZŠ a MŠ s VaVJM P.Pázmanya, Šaľa	0	6	1	0	7	N	
10	Kristína Schmidtová	Gymnázium J.Fándlyho, Šaľa	0	0	5	0	5	N	
8	Patrícia Vyskočová	ZŠ, Močenok	1	0	1	1	3	N	
12	Stanislava Hajduková	ZŠ, Tešedíkovo	0	0	2	1	3	N	
4	Timea Nagy	ZŠ J.C.Hronského, Šaľa	0	0	1	0	1	N	
9	Samuel Lovász	Gymnázium J.Fándlyho, Šaľa	0	0	1	0	1	N	
13	Kristína Dičerová	ZŠ Horná Kráľová	0	0	0	0	0	N	
14	Adam Rábek	ZŠ Horná Kráľová	0	0	0	0	0	N	
17	Réka Szabóová	ZŠ a MŠ s VaVJM P.Pázmanya, Šaľa	0	0	0	0	0	N	
11	Terézia Sádovská	Gymnázium J.Fándlyho, Šaľa							

počet zúčastnených: **17**
počet úspešných : **7**
úspešnosť : **41%**

Blahoželáme!