Moderné vzdelávanie pre vedomostnú spoločnosť / Projekt je spolufinancovaný zo zdrojov EÚ

Ing. Beáta Ľubová

SKÚSENOSTI S APLIKÁCIOU NEŠTANDARDNÝCH MATEMATICKÝCH ÚLOH V PODMIENKACH SOŠ

Osvedčená pedagogická skúsenosť edukačnej praxe

Banská Bystrica
2014

Vydavateľ:	Metodicko-pedagogické centrum, Ševčenkova 11, 850 01 Bratislava
Autor OPS:	Ing. Beáta Ľubová
Kontakt na autora:	Spojená škola, Hattalova 471, 027 43 Nižná lubova11@zoznam.sk
Názov OPS/OSO:	Skúsenosti s aplikáciou neštandardných matematických úloh v podmienkach SOŠ
Rok vytvorenia OPS:	2014 XI. kolo výzvy
Odborné stanovisko vypracovala:	RNDr. Anna Zubáková

Za obsah a pôvodnosť rukopisu zodpovedá autor. Text neprešiel jazykovou úpravou.

Táto osvedčená pedagogická skúsenosť edukačnej praxe/osvedčená skúsenosť odbornej praxe bola vytvorená z prostriedkov národného projektu Profesijný a kariérový rast pedagogických zamestnancov.

Projekt je financovaný zo zdrojov Európskej únie.

Kľúčové slová

neštandardná úloha, konštruktivizmus, transmisívna výučba, integrovaná tematická výučba, izolovaný model, generický model, formalizmus

Anotácia

Autorka v práci opisuje svoje skúsenosti s uplatňovaním neštandardných matematických úloh v jednotlivých tematických okruhoch štátneho vzdelávacieho programu. Neštandardné matematické úlohy výrazne odstraňujú formalizmus vo výučbe a ich aplikácia súvisí s uplatnením konštruktivistických princípov. V jednotlivých kapitolách autorka uvádza námety úloh a poukazuje na medzipredmetový charakter výučby matematiky na strednej odbornej škole.

Akreditované programy kontinuálneho vzdelávania

Názov akreditovaného vzdelávacieho programu KV	Číslo akreditovaného vzdelávacieho programu KV
Tvorba úloh z matematiky	88/ 2010
Výučba matematiky s podporou edukačného softvéru	331/ 2010
Praktické uplatňovanie kreativizujúcich a aktivizujúcich metód a koncepcií v edukácii so zacielením na rozvíjanie kooperatívnych zručností žiakov	1060/ 2013

OBSAH

ÚVOD

Moja práca obsahuje ukážky neštandardných matematických úloh, ktoré sú zaradené do jednotlivých tematických okruhov podľa platného štátneho vzdelávacieho programu ISCED 3A. V súčasnosti prebieha v rámci inovácií výchovno-vzdelávacieho procesu niekoľko celoštátnych aktivít, ktorých cieľom je prepojenie odborného vzdelávania s praxou. Obsahom týchto aktivít je odstránenie formalizmu z vyučovacieho procesu. Jednou z ciest ako odstrániť formálne poznatky z poznania žiaka je aplikácia konštruktivistických princípov vo výučbe. Problém povrchného a krátkodobého uchovávania informácii v mysli žiaka je aktuálny aj v matematickom vzdelávaní. Priblížiť matematiku k potrebám žiaka sa mi podarilo prepájaním a spájaním odborných úloh s úlohami matematickými. Za výhodu považujem to, že som učiteľkou matematiky na strednej odbornej škole. Snažila som sa teda o integrovanú tematickú výučbu v rámci predmetov: matematika-informatika, matematika-elektrické merania, matematika-ekonomika a pod. V práci prinášam len ukážky takýchto úloh. Mojim cieľom nebolo vytvorenie rozsiahlej zbierky úloh. Práca má motivačný charakter. Tiež chcem upozorniť, že v inej pozícii je pri tvorbe neštandardných úloh učiteľ matematiky v rámci gymnaziálneho vzdelávania a v inej pozícii je učiteľ matematiky v rámci odborného vzdelávania, v zmysle rozdielnych možností integrovanej tematickej výučby. Moja práca je určená hlavne učiteľom matematiky v podmienkach strednej odbornej školy (podmienky: dotácia hodín na výučbu prírodovedných predmetov, skladba odborných predmetov podľa študijných zameraní a pod.). Moje najlepšie skúsenosti ako prekonať formalizmus v nadobúdaní nových matematických poznatkov súvisia s aplikáciou pedagogického konštruktivizmu.

Konštruktivizmus sa často chápe ako protiklad transmisívneho odovzdávania informácii. V rámci transmisívneho vzdelávania je žiak pasívnym prijímateľom informácii, faktov, postupov, algoritmov a to bez skúmania vzájomných vzťahov medzi objektmi. Pri uplatnení konštruktivistických princípov žiak získava priestor na prácu s učivom. Každý žiak sa snaží sám prísť na spôsob riešenia – princíp, podľa ktorého daný objekt funguje. Dochádza k chemickej reakcii s prekonceptom, ktorý má žiak vytvorený v mysli z predchádzajúcich skúsenosti. Často dochádza aj k želanému kognitívnemu konfliktu s danou predstavou, ktorú žiak mal o danom objekte. Vtedy nastáva proces produkcie nových riešení. Transmisívna výučba sa spája s aplikáciou štandardných úloh – dosadiť do vzorca, použiť známy postup riešenia. Je len samozrejme, že v istej miere je transmisívna výučba nevyhnutná a vhodne dopĺňa ďalšie konštruktivistické prístupy. Neštandardnými úlohami môžeme vzbudiť záujem žiaka o matematiku a to napríklad aj z týchto príčin:

- žiak musí vyvinúť intelektuálne úsilie pri riešení úlohy,
- žiak rieši problém z odbornej praxe alebo reálny problém z bežného života s využitím matematiky,
- žiak aktívne pracuje s prekonceptmi, hľadá súvislosti medzi objektmi,
- žiak má dostatočný priestor pre aktívnu prácu s danou problematikou (učiteľ vytvára podnetné prostredie).

Aplikácia neštandardných úloh do výučby je v spojitosti s konštruktivistickým spôsobom vzdelávania. Dochádza k zmene úlohy (role) učiteľa. Učiteľ:

- skúma príčiny žiackych postupov a rozhodnutí,
- hodnotí žiaka a vzniknutú situáciu komplexne,
- uprednostňuje dialogické metódy,

- kooperuje so žiakmi,
- povzbudzuje žiaka k samostatnosti a k prijímaniu osobnej zodpovednosti,
- stáva sa členom „učiacej sa spoločnosti“.

V prvej kapitole mojej práce opisujem rozdiel medzi štandardnou a neštandardnou matematickou úlohou. Neštandardné matematické úlohy by mali byť súčasťou každého tematického okruhu definovaného v rámci štátneho vzdelávacieho programu. Z týchto dôvodov je aj moja práca členená ďalej na kapitoly, v ktorých poskytujem námety na zaradenie úloh do výučby v rámci danej témy. Táto práca nie je zbierka úloh. Uvádzam len ukážky úloh, s ktorými som u žiakov dosiahla výrazne pozitívnu spätnú väzbu.
Súčasťou neštandardných úloh sú aj bádateľské – výskumné úlohy. V prílohe práce uvádzam príklad výskumnej úlohy, ktorú zrealizoval žiak 3. ročníka v rámci projektu Karlovej univerzity (Talnet) [3]. Za daný výskum získal 220 z celkovo možných 240 bodov a certifikát tejto univerzity. Pravidelným riešením neštandardných úloh na hodinách matematiky zvyšuje sa aj zastúpenie žiakov v rôznych prírodovedných súťažiach a ich záujem zúčastniť sa rôznych matematických kongresov (napríklad účasť na európskom matematickom kongrese Euromath 2014, Cyprus).
Cieľová skupina, pre ktorú by mohla byť predložená práca zaujímavá: učiteľ pre stredné odborné vzdelávanie.
Cieľ práce som už definovala v rámci úvodných viet, pridám teda zhrnutie toho, čo som so žiakmi pri realizácií neštandardných úloh „zažila“. Tieto skúsenosti z realizácie výchovno-vzdelávacieho procesu s aplikáciami neštandardných úloh ma viedli k napísaniu šiestich kapitol, ktoré majú motivačný charakter.
Odporúčam zaradiť neštandardné matematické úlohy do procesu výučby aj na základe týchto mojich „zážitkov“:

- pozorovala som u žiakov skutočný záujem o vyriešenie matematického problému,
- zaznamenala som nárast úrovne v oblasti rozvoja odborných kompetencií, žiaci si začali viac uvedomovať prepojenie poznatkov z matematiky a poznatkov z odborných predmetov,
- pozorovala som väčšiu samostatnosť žiaka pri riešení úlohy, snahu modifikovať úlohu o ďalšie údaje z odbornej praxe,
- žiaci často diskutovali o úlohách a zlepšila sa ich komunikácia v jazyku matematiky.

Každý z týchto postrehov, ktorý uvádzam je pre mňa „ hnacím motorom“ skúšať a vymýšľať ďalšie úlohy, aplikovať nové formy a spôsoby práce so žiakmi.
Cieľ „OPS“ je jasne definovaný: „podeliť sa“ o najlepšie pedagogické skúsenosti, ktoré učiteľ získa pri aplikovaní inovatívnych metód vzdelávania.
Ako som zistila, že realizáciou úloh sa zvýšila efektivita výučby?

- zvýšila sa účasť žiakov v tzv. STEM súťažiach (získali sme ocenenia v medzinárodnom meradle),
- zvýšil sa záujem žiakov o riešenie matematických úloh v celom procese výučby a z pozície prijímateľov informácií sa zo žiakov stali autori projektov a úloh,
- zlepšila sa pracovná atmosféra a schopnosť žiakov kooperovať,
- zvýšila sa kreativita žiakov, ktorí si vytvárali vlastné riešiteľské stratégie.

Spätná väzba bola realizovaná rôznymi spôsobmi a podrobnejšie sa tejto téme venujem aj v rámci OPS z 9. kola, z tohto dôvodu som sa v tejto práci zamerala na aplikáciu neštandardných matematických úloh a reflexiu podávam len štandardne, bez uvedenia dotazníkov, ktoré nájde čitateľ, v prípade hlbšieho záujmu v mojej OPS z 9. kola.

1 NEŠTANDARDNÉ MATEMATICKÉ ÚLOHY

Matematické úlohy a ich riešenia sú tvorivým obsahom vyučovania matematiky. Uplatňujú sa vo všetkých fázach výučby a sú nositeľom poznatkov, spôsobilosti a schopnosti, ktoré sa snažíme odovzdávať žiakom. Pre školskú matematiku sa používa delenie úloh na štandardné a neštandardné. Existujú aj ďalšie delenia úloh z rôznych hľadísk, ktoré si môže čitateľ ľahko vyhľadať, napríklad prostredníctvom internetových zdrojov.

Štandardné úlohy kladú dôraz na pamäť, na kopírovanie vzoru a len málo sa prispôsobujú individuálnemu rozvoju žiaka. Štandardné úlohy delíme na:

- úlohy, ktorých riešenie vyžaduje použiť známe pravidlo,
- úlohy, ktoré sú zopakovaním už známeho postupu.

Riešenie týchto úloh má len malý podiel na rozvoji matematických kompetencií žiaka. Väčšinou tieto úlohy plnia kontrolnú funkciu:

- zisťovanie úrovne poznania žiaka v oblasti matematických pojmov,
- zisťovanie úrovne poznania žiaka v oblasti základných vzťahov, postupov, matematických symbolov.

Príklady štandardných úloh:

1. úlohy založené na pamäťovej reprodukcii poznatkov:

- úlohy na reprodukciu faktov, čísel, pojmov,
- úlohy na reprodukciu definícii, noriem a pravidiel.

Formulácie úloh tohto typu najčastejšie začínajú napríklad týmito slovami:

- definujte,
- ako znie,
- čo platí,
- zopakujte.

2. úlohy vyžadujúce jednoduché myšlienkové operácie, ktorých obsahom je:

- meranie, váženie, jednoduchý výpočet,
- popis faktov, vytvorenie zoznamu, súpisky,
- vymenovanie a popis procesov,
- pozorovanie a rozlišovanie,
- triedenie a klasifikácia.

Formulácie úloh tohto typu začínajú napríklad týmito slovami:

- vymenujte časti,
- uveďte postup,
- odmerajte,
- vypočítajte rozmer,
- nájdite spoločné znaky,
- určte rozdiely.

Štandardné matematické úlohy sa spájajú prevažne s transmisívnym odovzdávaním informácii žiakom a s tradičnou motiváciou. Učiteľ predloží praktický problém prostredníctvom ktorého predvedie ukážku riešenia s aplikáciou nových pojmov, vzorcov, veličín. Žiak nie je v tomto prípade vedený k samotnému bádaniu vzťahov a v jeho mysli nevzniká spojenie medzi „neviem“ a „chcel by som vedieť“. Protiklad tradičnej motivácie je konštruktivistická motivácia, ktorá je charakterizovaná podľa M. Hejného[3] dvoma parametrami:

1. parameter: v mysli žiaka dochádza k vyvolaniu investigatívnej zvedavosti.
2. parameter: vytváranie izolovaných modelov.

Neštandardné matematické úlohy:

- aktivizujú žiaka k vytváraniu vlastných riešiteľských stratégii,
- rozvíjajú jeho predstavivosť a dedukciu,
- rozvíjajú medzipredmetové vzťahy. Žiak hľadá komplexné riešenie úlohy a využíva svoje vedomosti z rôznych oblastí života
- zvyšujú efektivitu výučby,
- v značnej miere odstraňujú formálne prijímanie informácii, ktoré nevedie k vytváraniu trvalých poznatkov a k následnému použitiu matematiky pri riešení problémov z bežného života.

Neštandardnými matematickými úlohami napĺňame didaktické zásady inovatívnej výučby[1],[4]:

Didaktické zásady výučby sú všeobecné požiadavky na vyučovaciu činnosť, na formu a metódu výučby, na materiálne didaktické pomôcky, na poznávaciu činnosť žiaka atď.

- zásada komplexného rozvoja osobnosti žiaka:

Neštandardné matematické úlohy sa spájajú s inovatívnymi metódami výučby a konštruktivistickými prístupmi, ktoré rozvíjajú nielen kognitívne kompetencie žiaka, ale aj sociálne zručnosti žiaka (v rámci kooperácie, tímovej spolupráce a pod.).

- zásada vedeckosti:

Učiteľ prostredníctvom neštandardných úloh umožňuje žiakom hľadať vlastné riešiteľské stratégie. Pomoc učiteľa sa prejaví napríklad v oblasti vytvárania podnetného prostredia (prostredie podnecujúce tvorivosť žiaka).

Bádateľská činnosť žiaka prebieha zvyčajne v niekoľkých etapách:

1. Nesystematické poznávanie situácie: prebieha individuálne, v skupinách alebo v rámci celej triedy. V tejto etape žiaci získavajú prvé skúsenosti súvisiace so zadanou problémovou úlohou.
2. Systematické bádanie: v rámci tejto etapy sú výsledky zaznamenávané organizovanou formou, ktorá žiakom umožňuje nachádzať vzájomné vzťahy medzi premennými, veličinami a pod.
3. Tvorba hypotéz: dochádza k zovšeobecneniu výsledkov a k predpovedaniu výsledkov ďalších príkladov.
4. Testovanie hypotéz: závisí od schopnosti žiakov, zväčša hľadajú proti-príklad.
5. Ďalšie skúmanie problémovej úlohy- tzv. rozvoj situácie.
6. Zhrnutie: žiaci v tejto etape písomnou alebo ústnou formou opíšu, čo zistili v predchádzajúcich etapách, ich skúsenosti, dosiahnuté výsledky v súvislosti s danou problematikou. Obhajujú vlastný názor, formulujú svoje myšlienky a učia sa kriticky myslieť.

- zásada spájania teórie s praxou:

Aplikáciou neštandardných matematických úloh plníme vo významnej miere túto didaktickú zásadu. Napríklad žiak, ktorý študuje odbor: energetik, skúma a vyhodnocuje štatistickými metódami vzájomnú závislosť medzi významnými veličinami v oblasti alternatívnych zdrojov energie. Žiak, ktorý študuje odbor: autoelektronika sa zaoberá priebehom Beziérovej krivky v úlohách primeranej náročnosti.

- zásada aktivity žiaka vo výučbe:

Aplikujem konštruktivistické prístupy vo výučbe, ktoré sú založené na aktivite žiaka. Žiak: tvorí, skúma, vyhodnocuje, obhajuje.

M.Hejný a F.Kurina [3] definujú desať zásad tzv. didaktického konštruktivizmu, ktorý je špeciálne prispôsobený matematickému vzdelávaniu:

1. matematika má byť považovaná za špecifickú činnosť človeka a nie za výsledok tejto činnosti.

2. podstatnou zložkou matematickej aktivity je hľadanie súvislostí, riešenia problémových úloh, zovšeobecňovanie tvrdení, zdôvodňovanie.
3. vedomosti sú neprenosné, vznikajú v mysli učiaceho sa človeka.
4. tvorba vedomosti sa opiera o skúsenosti poznávajúceho.
5. základom matematického vzdelávania je tvorba prostredia podnecujúceho tvorivosť.
6. konštrukcia poznatku je ovplyvnená v značnej miere sociálnou interakciou v triede.
7. dôležitú úlohu spĺňa štrukturálne budovanie matematického sveta.
8. veľký význam má komunikácia v triede a rozvíjanie rôznych jazykov matematiky.
9. vzdelávací proces je nutné hodnotiť minimálne z troch hľadísk: porozumenie matematickým vzťahom, zvládnutie matematického remesla a aplikácia matematiky.
10. vedomosti založené na reprodukcii informácií vedú k pseudopoznaniu a k rozvoju formalizmu.

Uvedených desať bodov súvisí s prepojením matematiky s riešením reálnych problémov zo života.

- zásada názornosti:

Práve neštandardné úlohy sú založené na práci s didaktickou technikou, reálnymi pracovnými a vedeckými nástrojmi bádania (tablety, senzory, grafický softvér a pod.)

- zásada sústavnosti a primeranosti:

Uvedený typ úloh by mal mať zastúpenie v každom tematickom celku v rámci vzdelávacej oblasti: matematika a práca s informáciami.
Vhodnou metódou zabezpečíme individuálny prístup k žiakom, podľa preferovaného učebného štýlu.
Americkí autori Knirk a Gustafson [5] považujú za prvú zásadu modernej didaktiky – sústredenie sa na aktivitu žiaka: „Vyučovanie je potrebné premyslieť, plánovať a hodnotiť nielen z hľadiska činnosti učiteľa, ale predovšetkým z pohľadu žiaka: čo žiak zažije, čo bude robiť a čo si z výučby odnesie."
Úloha učiteľa pri aplikácii neštandardnej matematickej úlohy:
Učiteľ, ktorý sa snaží v maximálnej miere prispieť k formovaniu osobnosti žiaka, hlavne vo sfére kognitívneho a metakognitívneho rastu, nepredkladá žiakovi hotové výsledky - riešenia úloh. Úlohou učiteľa je ukázať žiakom cestu, po ktorej sa on sám dopracoval k výsledkom svojho poznania. „Odhalí" im svoj osobný vzťah k matematike a predkladá žiakom úlohy, ktoré zodpovedajú reálnym potrebám ich odbornej praxe. Je nevyhnutné, aby učiteľ považoval úlohy za zaujímavé, podnetné a potrebné pre rozvoj odborných kompetencií žiaka. Mojou osobnou skúsenosťou je, že pokiaľ som sama nezískala dostatok informácii a skúseností z oblasti odborných predmetov napríklad z predmetov: energetika, informatika, nemohla som presvedčivo podnietiť záujem žiakov o riešenie výskumných úloh z tejto oblasti. Za výhodu považujem to, že som aj koordinátorkou environmentálnej výchovy a k poznatkom z oblasti alternatívnych zdrojov energie som sa „dopracovala" aj týmto spôsobom, prostredníctvom koordinácie prierezovej témy. Tým sa zjednodušila moja komunikácia so žiakmi študujúcimi odbor energetik a mohla som im zadať námety na bádateľské úlohy aj z tejto oblasti. Napríklad v rámci tematického celku: štatistika, žiaci pomocou štatistických nástrojov opisovali vzájomný vzťah medzi hodnotami globálneho slnečného žiarenia a dĺžkou slnečného svitu. Vytvorili matematický model, stanovili hypotézu a pracovali na jej overovaní. S výsledkom výskumu sa dostali do finále európskej matematickej súťaže Euromath 2014 a získali certifikát. Počas realizácie tejto bádateľskej úlohy som sa snažila vytvárať tvorivé prostredie žiakom, pomáhala som im s organizačným zabezpečením ich účasti na Cypre, kde sa súťaž konala. Aj to prispelo k rastu ich sebadôvery, videli pred sebou cieľ, reprezentáciu a možnosť osobnostného rastu.

Najčastejšie chyby, ktoré sa môžu stať vo vzájomnom kontakte učiteľ – žiak pri riešení neštandardných úloh:

- učiteľ predloží žiakom algoritmus riešenia úlohy, opíše jednotlivé kroky, ktoré žiaka majú doviesť k správnemu riešeniu,
- učiteľ v predstihu prezradí výsledok úlohy,
- učiteľ v predstihu upozorní žiaka na chybu,
- učiteľ označení svoju riešiteľskú stratégiu za jedinú správnu a neumožní žiakom vytvárať vlastné stratégie riešenia úloh.

Neštandardné úlohy sú efektívnym prostriedkom výučby, pretože vždy sú definované v určitých súvislostiach a vzájomných vzťahoch s už existujúcim poznaním u žiaka.
Tam, kde je kognitívna sieť poznatkov hustejšia, je učenie efektívnejšie a teda kvalitnejšie.
Medzi tento typ úloh môžeme zaradiť: úlohy vyžadujúce tvorivé myslenie:

- úlohy na praktické aplikácie,
- riešenie problémových situácií,
- zadávanie otázok a formulácia úlohy,
- objavovanie na základe vlastného pozorovania,
- objavovanie na základe vlastných úvah.

Formulácia úloh začína napríklad týmto spôsobom:

- vypracujte návrh,
- vymyslíte praktický príklad,
- na základe vlastného pozorovania určte,
- navrhnite zlepšenie,
- nájdite nové riešenie.

Vybavenie učebne, v ktorej som realizovala so žiakmi opísané aktivity:

- počítače, dataprojektor.

Učebňa má pripojenie na internet.

2 NEŠTANDARDNÉ MATEMATICKÉ ÚLOHY V TEMATICKOM OKRUHU: GEOMETRIA A MERANIA

Podľa štátneho vzdelávacieho programu ISCED 3A [2] v rámci tematického okruhu geometria a merania žiak má:

- skúmať a objavovať rovinné a priestorové útvary,
- odhadom, meraním i výpočtom určiť obsah, povrch a objem,
- riešiť polohové a metrické úlohy z bežnej reality,
- zvyšovať svoju úroveň priestorovej predstavivosti.

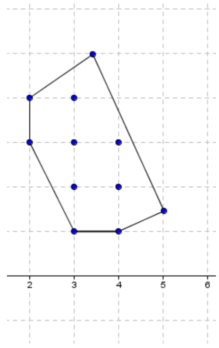
Úlohy, ktoré uvádzam v tejto časti sú založené na deduktívnych úvahách. Žiak tvorí, načrtáva rovinný útvar v programe Geogebra a skúma platnosť vzorca. Skúma, či daný vzorec platí bez obmedzení alebo len pre rovinný útvar s určitou charakteristickou vlastnosťou. Vybavenie učebne, v ktorej prebiehala výučba: počítače, dataprojektor.
Každá z vyučovacích hodín, na ktorých som použila nasledujúce príklady bola vedená metódou EUR (evokácia, uvedomenie si významu a reflexia) a to v rámci druhej fázy – uvedomenie si významu. Uplatnila som konštruktivistický princíp - aktívni boli žiaci. Motiváciu som posilnila aj vhodnou obmenou slov – napríklad, ak som vyučovala žiakov študijného odboru autolektronika, použila som v úlohách objekty ako autodielňa, sklad náhradných dielov a pod. Odporúčam použiť v úlohách rôzne typy metafor.
Uvádzam len niekoľko úloh, s ktorými som mala najlepšiu skúsenosť vo výchovno-vzdelávacom procese (efektivita výučby, aktivita žiakov, pozitívna spätná väzba, neformálnosť nadobudnutých poznatkov).
Poznámka: úlohy sú riešené v programe Geogebra, ktorý je voľne dostupný a medzi učiteľmi známy. Z tohto dôvodu sa v tejto práci nesústredím na základy práce s Geogebrou (týkajúce sa aj pracovného prostredia- siete, voľby pozadia a pod.).
Úloha 1:
Obsah mnohouholníka, ktorého vrcholy sú umiestnené v mriežkových bodoch štvorcovej siete môžeme vypočítať podľa Pickovho vzorca:

$$S = v + \frac{h}{2} - 1$$

h- počet mriežkových bodov na hranici útvaru
v– počet mriežkových bodov vo vnútri mnohouholníka

napríklad:
pre mnohouholník na obrázku č.1 platí:
h = 6
v = 5
S = 5 + 6/2 -1
S = 7 cm^2

Výber a konfigurácia siete a ďalšie nastavenia v rámci programu Geogebra súvisia ďalej s jednotkou obsahu. Keďže cieľom tejto práce nie je opis činnosti softvéru, viac informácií o Geogebre si čitateľ nájde napríklad na internete. Aj keď som presvedčená, že s týmto softvérom má väčšina učiteľov bohaté skúsenosti a vytvárajú so žiakmi zaujímavé a kreatívne riešenia úloh z rôznych tematických okruhov.

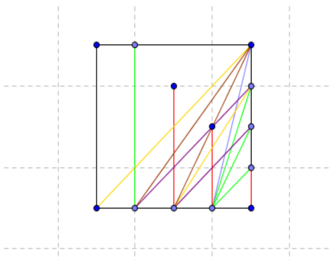


Obr.1 Mnohouholník– náčrt v programe Geogebra

Prameň: vlastný archív

Doplňujúca úloha: Overte, či Pickov vzorec platí aj pre nekonvexné útvary.
Žiak si sám zvolil a načrtol nekonvexný útvar a previedol výpočet.
V maximálnej miere som sa snažila obmedziť striktné zadanie úlohy. Matematika má byť pre žiaka pomôckou v jeho odbornom raste a v osobnom živote. Reálne situácie, ktoré sa snažíme opísať matematickým modelom, zväčša nie sú striktne vymedzené a umožňujú žiakom prejaviť svoju kreativitu.

Úloha 2: Koľko navzájom nezhodných úsečiek s krajnými bodmi umiestnenými v mriežke štvorcovej siete existuje v tabuľke 4 x 4 ? (14)



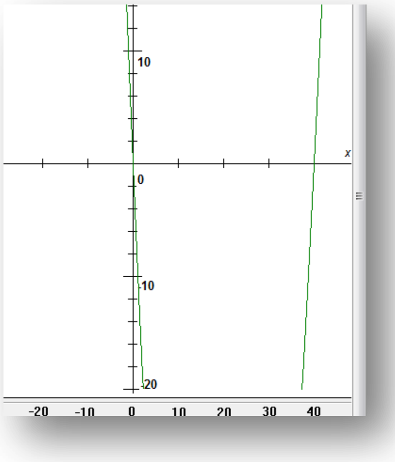
Obr. 2 Žiacke riešenie – označenie nezhodných úsečiek

Prameň: vlastný archív

V ďalšom kroku žiak má určiť dĺžku týchto úsečiek.

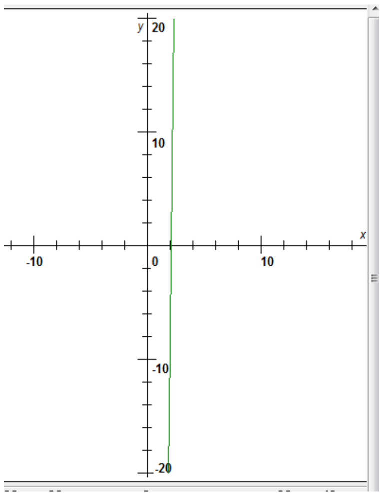
V treťom ročníku v rámci uvedeného tematického okruhu riešia žiaci aj túto neštandardnú matematickú úlohu.

Úloha 3:
Je daný kváder s dĺžkami hrán (a, b, c), pre ktoré platí: b = a – 4
c = 20 - b
Zapíšte objem a povrch kvádra ako funkciu V (a) a P (a) v závislosti od dĺžky hrany a.
Žiacke riešenie:
a, b= a-4, c= 24-a
obmedzujúce podmienky:
a je z intervalu (4,24) b je z intervalu (0, 20) c je z intervalu (0,20)
$V(a) = -a^3 + 28a^2 - 96a$
$P(a) = -2a^2 + 96a - 192$
Graf funkcie V(a) a P(a):



Obr. 3 Žiacke riešenie úlohy – zakreslenie funkcie V(A), softvér: Funkce

Prameň: vlastný archív



Obr. 4 Graf funkcie P(a), sofvér: Funkce

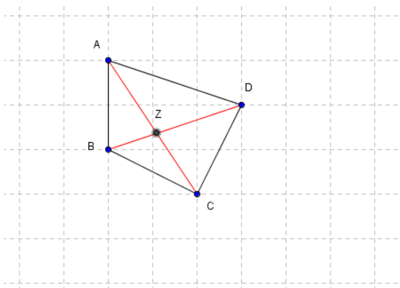
Prameň: vlastný archív

Úloha 4:

Pre štyri mestá, ktoré si môžeme označiť ako A,B,C,D, má byť postavená základná škola (označenie Z) tak, aby súčet vzdialeností | AZ| + | BZ| +| CZ| + | DZ| bol minimálny.

Určte bod Z (polohu základnej školy) za predpokladu, že ABCD je konvexný štvoruholník.

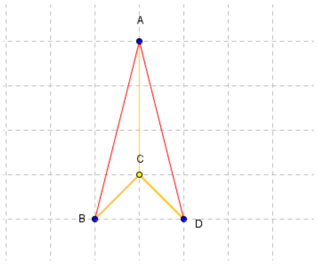
Žiacke riešenie:



Obr. 5 Grafické znázornenie riešenia

Prameň: vlastný archív

Zakreslením problémovej situácie do štvorcovej siete a využitím trojuholníkových nerovností našli žiaci riešenie. V úlohe sme ďalej pokračovali - zmenili sme predpoklad: Určte bod Z za predpokladu, že útvar ABCD je nekonvexný štvoruholník.
Žiacke riešenie: C=Z



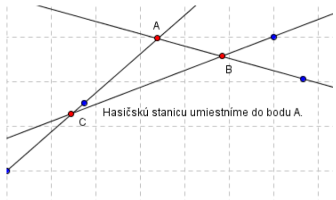
Obr. 6 Grafické znázornenie riešenia

Prameň: vlastný archív

Úloha 5:
Pre tri priamočiare cesty s križovatkami A, B, C, má byť určená poloha stavby: hasičská stanica tak, aby súčet vzdialeností bol minimálny za predpokladu, že trojuholník ABC je:

a.) rôznostranný
b.) rovnostranný

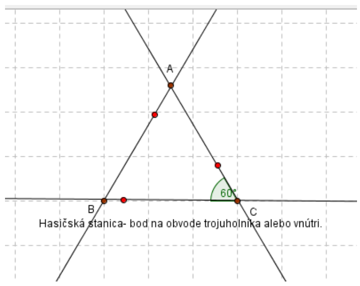
Žiacke riešenie: a.)



Obr. 7 Umiestnenie hasičskej stanice

Prameň: vlastný archív

b.)



Obr. 8 Umiestnenie hasičskej stanice

Prameň: vlastný archív

3 NEŠTANDARDNÉ MATEMATICKÉ ÚLOHY V TEMATICKOM OKRUHU: KOMBINATORIKA, PRAVDEPODOBNOSŤ A ŠTATISTIKA

Podľa štátneho vzdelávacieho programu ISCED 3A v tematickom okruhu: kombinatorika, pravdepodobnosť a štatistika, žiak má získať vedomosti, zručnosti a ďalšie kľúčové kompetencie v takej miere, aby dokázal:

- používať rôzne stratégie zisťovania počtu možností založené na vypisovaní alebo systematickom vypisovaní možností alebo na kombinatorickom pravidle súčtu a súčinu,
- používať základné pravdepodobnostné pojmy,
- riešiť úlohy zamerané na hľadanie pomeru všetkých priaznivých a všetkých možností aj pomocou jednoduchých kombinatorických úloh, doplnkovej pravdepodobnosti,
- riešiť úlohy využitím geometrickej pravdepodobnosti.

Celý výkonový štandard pre tento tematický okruh nájdeme na webovej stránke štátneho pedagogického ústavu.

Nasledujúce dva príklady som použila u žiakov so študijným odborom: mechanik elektrotechnik. Príklady slúžia aj ukážka ako prepojiť poznatky z predmetu elektrotechnické merania a matematika. Vyučovacia hodina bola vedená opäť metódou EUR a príklady boli aplikované v druhej fáze – uvedomenie si významu.

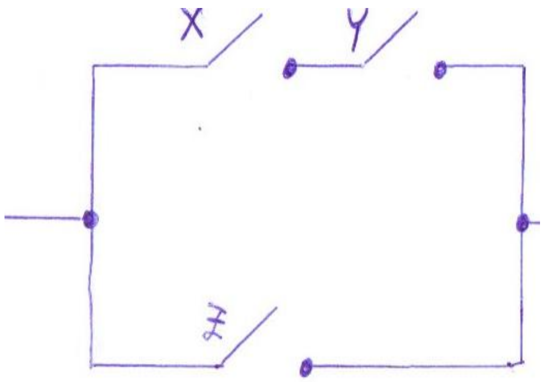
Úloha 1:

Určte s akou pravdepodobnosťou prechádza obvodom prúd, ak pravdepodobnosť, že spínače X,Y,Z sú zapnuté je :

P(X) = 0,4

P(Y) = 0,6

P(Z) =0,8



Obr. 9 Žiacky náčrt schémy

Prameň: vlastný archív

Žiacke riešenie úlohy:

Jav A: obvodom prechádza prúd

$P(X) + P(X \cap Y) - P(Z \cap X \cap Y) = P(A)$

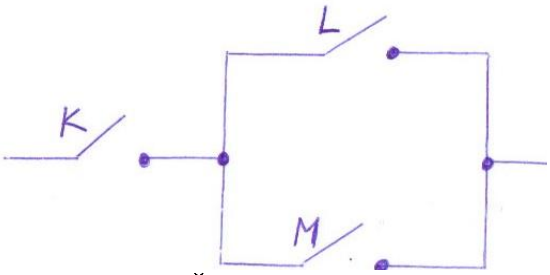
$P(A) = 0{,}848$

Pravdepodobnosť, že za uvedených podmienok bude prechádzať obvodom prúd je 84,8%.

Úloha 2:

Určte s akou pravdepodobnosťou prechádza prúd obvodom ak pravdepodobnosť, že spínače sú zapnuté predstavuje tieto hodnoty:

$P(K) = 0{,}9$
$P(L)=0{,}5$
$P(M) = 0{,}7$



Obr.10   Žiacky náčrt schémy

Prameň: vlastný archív

Žiacke riešenie:

$P(K) \cdot [P(L) + P(M) - P(L) \cdot P(M)] = 0{,}9 \cdot (0{,}5 + 0{,}7 - 0{,}5 \cdot 0{,}7) = 0{,}765$

Pravdepodobnosť javu: obvodom s danými podmienkami bude prechádzať prúd je rovná 76,5 %.

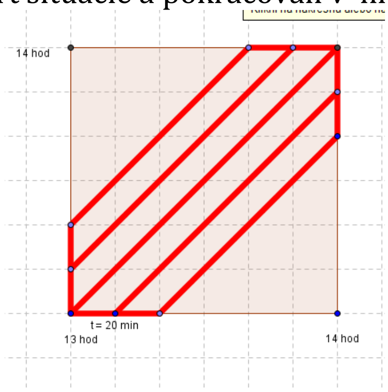
Zvýšený záujem a aktivitu som postrehla u žiakov študijného odboru autoelektronika pri riešení úloh z oblasti: plošná a priestorová pravdepodobnosť.

Úloha 3 – plošná pravdepodobnosť:

Peter a Jana sa dohodli, že sa stretnú medzi 13 - 14 hodinou v parku. Keďže si neboli úplne istí, či sa im podarí prísť na stretnutie, zvolili si čakaciu dobu 20 minút. Aká je pravdepodobnosť, že sa stretnú za týchto podmienok?

Žiacke riešenie:

Žiaci samostatne zostavili náčrt situácie a pokračovali v hľadaní riešenia:



Obr. 11 Grafické znázornenie problémovej úlohy

Prameň: vlastný archív

Vyšrafovaná oblasť predstavuje hľadanú hodnotu pravdepodobnosti.

Najviac frekventovaný postup:

$S_1 = (20.20) : 2$ (obsah pravouhlého trojuholníka so stranou dĺžky 20 jednotiek (napr. mm)

Strany obdĺžnika: $a = 40.\sqrt{2}$, $b = 20.\sqrt{2}$

Obsah obdĺžnika: 1600 mm^2

Celkový obsah vyšrafovanej časti : 400 + 1600 = 2000 mm^2

Pravdepodobnosť javu A: stretnutie Petra a Jany za uvedených podmienok je:

$P(A) = 2000 : 3600 = 0{,}56$

Jana a Peter sa stretnú v parku s pravdepodobnosťou 56 % za uvedených podmienok.

4 NEŠTANDARDNÉ MATEMATICKÉ ÚLOHY V TEMATICKOM OKRUHU: ČÍSLA, PREMENNÁ A POČTOVÉ VÝKONY S ČÍSLAMI

Podľa štátneho vzdelávacieho programu ISCED 3A v tematickom okruhu: čísla, premenná a počtové výkony s číslami, žiak má získať vedomosti, zručnosti a ďalšie kľúčové kompetencie v takej miere, aby dokázal:

- použiť trojčlenku, priamu a nepriamu úmernosť na riešenie jednoduchých praktických úloh,
- posúdiť správnosť tvrdení vychádzajúcich z percentuálnych údajov,
- zvoliť spôsob výpočtu, ktorý v danej situácii vedie k čo najpresnejšiemu výsledku,
- vysvetliť princíp sčítania a násobenia v pozičnej sústave (napr. dvojkovej),
- oboznámiť, ako súvisia iné číselné sústavy s výpočtovou technikou.

Uvádzam skrátený výpis z výkonového štandardu. Celý výkonový štandard sa nachádza na webovej stránke štátneho pedagogického ústavu.
Uvedené úlohy som zaradila do druhej fázy hodiny (uvedomenie si významu), ktorá bola vedená s uplatnením konštruktivistického prístupu.
Prvé dve úlohy by som mohla zaradiť aj do tematického okruhu: funkcie, vzťahy. Nakoľko v nich žiak aplikuje vedomosti z oblasti priamej úmernosti a tiež poznatky o lineárnych funkciách, uvediem tieto úlohy v rámci tohto okruhu.
S uvedenými úlohami mám veľmi dobré skúsenosti. Žiakov zaujali hlavne z dôvodu, že videli prepojenie obsahu úlohy s ich študijným odborom a pri ich riešení kooperovali v skupinách.
Úloha 1:
Stroj mix vyrába drevené palisády z hranolov dlhých 8 metrov. Na jednu palisádu sa spotrebuje 80 cm dreva. Vyjadrite závislosť medzi počtom zhotovených palisád (n) a dĺžkou hranola (l).
Správne riešenie: $n = 800 - 80.l$

Úloha 2:
Firma Botanik sa zaoberá výrobou a distribúciou záhradníckych potrieb. Rozvoz tovaru môže zrealizovať využitím služieb jednej z týchto prepravných spoločnosti: Blesk, Hviezda alebo Strela. Náklady (y), ktoré bude mať firma Botanik pri využití služieb spoločnosti Blesk sa dajú vyjadriť vzťahom:

$$y = 8 + 3x$$

premenná x: vzdialenosť prevozu v km
Náklady (y), ktoré bude mať firma Botanik pri využití služieb spoločnosti Strela sa dajú vyjadriť vzťahom:

$$y = 5 + 4x$$

premenná x: vzdialenosť prevozu v km
Náklady (y), ktoré bude mať firma Botanik pri využití služieb spoločnosti Hviezda sa dajú vyjadriť vzťahom:

$$y = 50 + 2x$$

a.) Určte, ktorou prepravnou spoločnosťou bude najekonomickejšie voziť tovar do vzdialenosti 30 km.
b.) Určte, ktorou prepravnou spoločnosťou bude najekonomickejšie voziť tovar do vzdialenosti nad 100 km.

Tabuľka 1 Plánovanie úlohy – žiacke riešenie

Počet km(x)	Náklady spol. Blesk	Náklady spol. Strela	Náklady sp. Hviezda
30	98	125	110
100	308	405	250
101	311	409	252

Prameň: vlastný archív

a.) Najvýhodnejšie podmienky rozvozu do 30 km poskytuje spoločnosť Blesk.
b.) Najvýhodnejšie podmienky rozvozu nad 100 km poskytuje spoločnosť Hviezda.

V úlohách č.3 a č.4 žiak pracuje napríklad s využitím trojčlenky. Tieto neštandardné úlohy rozvíjajú medzipredmetové vzťahy medzi matematikou a fyzikou.

Úloha 3:
Na ohrev 1 litra vody na elektrickom variči s príkonom 600 W zo začiatočnej teploty 10 °C na bod varu sa spotrebuje energia približne 471 KJ. V koľkých gramoch mliečnej čokolády je ukrytá táto energia?
Sto gramov mliečnej čokolády má približnú energetickú hodnotu 2000 KJ. Výslednú hodnotu zaokrúhli na jedno desatinné miesto.
Žiacke riešenie: trojčlenka
100 g .... 2000kJ (čokoláda - energia)
x g..........471 kJ (ohrev vody – energia)

x = 471: 20
x = 23,6 g

Energia potrebná na ohrev 1 litra vody za uvedených podmienok predstavuje to isté množstvo energie ako 23, 6 gramov čokolády.

Úloha 4:
Peter zjedol 100 gramový balíček lieskových orechov s energetickou hodnotou 2872 kJ. Za aký čas spáli túto energiu počas túry, ak sa pohybuje rýchlosťou 6 km/ h a pri takejto rýchlosti pohybu spotrebuje energiu 1 000 kJ za hodinu. (2hod a 43 minút)

5 NEŠTANDARDNÉ MATEMATICKÉ ÚLOHY V TEMATICKOM OKRUHU: VZŤAHY, FUNKCIE, TABUĽKY A DIAGRAMY

Podľa štátneho vzdelávacieho programu ISCED 3A v tematickom okruhu: vzťahy, funkcie, tabuľky a diagramy, žiak má získať vedomosti, zručnosti a ďalšie kľúčové kompetencie v takej miere, aby dokázal:

- v jednoduchých prípadoch zvoliť vhodnú reprezentáciu daného vzťahu medzi veličinami, porozumieť tabuľkám a grafickým prezentáciám,
- vzťah opísaný slovne zapísať pomocou konštánt a premenných,
- modelovať reálne problémy a úlohy matematickým jazykom a interpretovať výsledky riešenia matematického problému do reálnej situácie,
- dosadiť do vzorca,
- zapísať dané jednoduché vzťahy pomocou premenných, konštánt, rovností a nerovností,
- použiť vhodnú metódu riešenia kvadratickej funkcie,
- riešiť jednoduché praktické úlohy vyžadujúce čítanie z grafu alebo jeho tvorbu,
- rozlíšiť lineárnu a exponenciálnu závislosť a uviesť typické príklady týchto závislostí,
- využiť grafy exponenciálnych funkcií k riešeniu úloh.

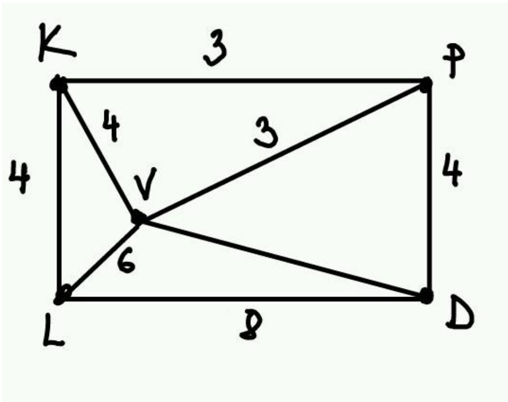
Celý výkonový štandard nájdeme na webovej stránke štátneho pedagogického ústavu[2].
Úlohy, ktoré sa nachádzajú v tejto kapitole boli žiakmi vnímané ako zaujímavé. Vyučovacie hodiny som viedla na princípoch konštruktivizmu a úlohy boli aplikované v druhej fáze vyučovacej hodiny – uvedomenie si významu.

Úloha 1: rast populácie bez vonkajších vplyvov
Počet obyvateľov Číny bol k 24. augustu 2013 podľa voľne dostupných štatistických údajov 1 386 806 714 [7].
Ročný prírastok obyvateľstva predstavuje 0,61%. V ktorom roku dosiahne počet obyvateľov Číny viac než 1 400 000 000 pri nezmenenom ročnom prírastku.
Žiacke riešenie:
$Q(t) = Q_0 . e^q$
$Q(t) = 1\,400\,000\,000$
$Q_0 = 1\,386\,806\,714$
$1\,400\,000\,000 = 1\,386\,806\,714 . (1 + 0{,}0061)^q$
$1{,}009513428 = 1{,}0061^q$ / log
$0{,}0041121 = 0{,}00264115.q$
$q = 1{,}557$
2013,653 + 1,557 = 2015, 21 / marec 2015

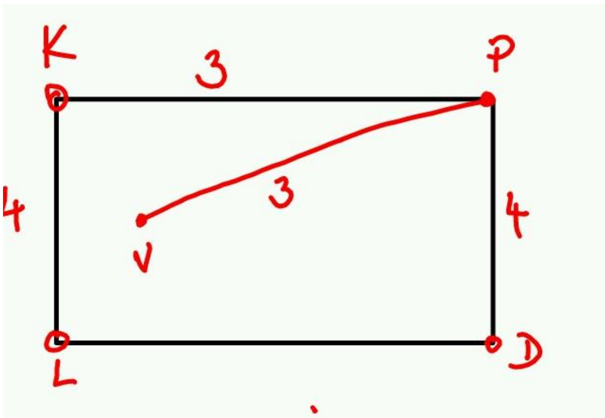
Úloha 2:
Počet obyvateľov mesta Fialkovo bol v roku 2012 presne 20 000. Ročný prírastok obyvateľov mesta predstavuje 5%. V ktorom roku dosiahne počet obyvateľov mesta Fialkovo hodnotu 22 050?
(v roku 2014)

Úloha 3:
Pri havárii atómovej elektrárne v Černobyli sa atmosféra kontaminovala rádioaktívnym jódom 131, ktorý má polčas rozpadu 8,1 dňa. Ako dlho trvalo, pokým sa rádioaktivita zredukovala na 0,5% od času havárie?
Žiacke riešenie:
log 0,5 = log 100 + (t/ 8,1) . log 0,5
-0, 30103 = 2 + (t/ 8,1) . (-0, 30103)
-2, 30103 =(- 0,30103 . t) / 8,1
t = 62 dní
Rádioaktivita sa zredukovala na 0,5 % za približne 62 dní od havárie.

Ohodnotené grafy alebo tiež vážené grafy - ich prvky sú ohodnotené číslom (váhou). Váha určuje výhodnosť prechodu daným prvkom.
Úloha 4:
Minimalizácia nákladov na vedenie rozvodnej siete:
Na obrázku sú znázornené obce: Lehota, Krivá, Púpava, Dlhá, Vrátka s uvedenými nákladmi na možné spoje elektrického vedenia medzi dvomi obcami. Všetkých päť obcí má byť spojené rozvodnou sieťou tak, aby náklady na výstavbu siete boli čo najmenšie. Navrhnite plán tejto rozvodnej elektrickej siete.
Žiacky náčrt situácie:

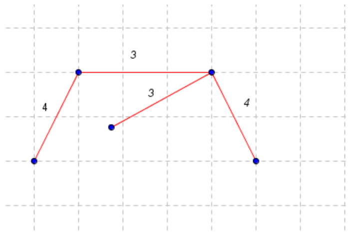


Obr.12 Návrh rozvodnej siete
Prameň: vlastný archív



Obr. 13 Grafické riešenie

Prameň: vlastný archív



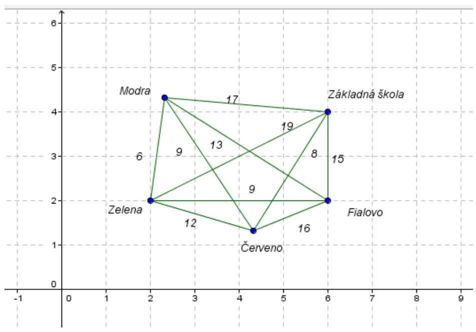
Obr. 14 Žiacky návrh rozvodnej siete v programe Geogebra

Prameň: vlastný archív

Ďalej úloha pokračovala hľadaním odpovede na otázky:

- koľko možností existuje pre vytvorenie rozvodnej siete ?
- aké sú celkové náklady na najdrahší spôsob zapojenia rozvodnej siete?

Úloha 4:

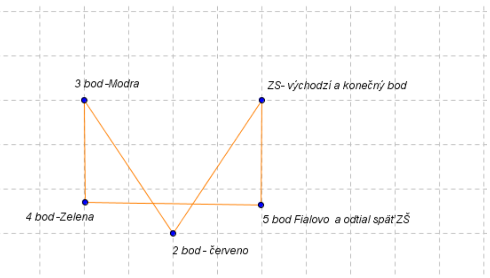


Obr. 15 Grafické znázornenie problémovej úlohy

Prameň: vlastný archív

Na obrázku je znázornená základná škola a štyri obce v okolí tejto školy: Modrá, Zelená, Červeno, Fialovo. Hodnoty hrán grafu predstavujú čas v minútach potrebný na dopravu medzi obcami a školou školským autobusom. Určte cestu autobusu tak, aby zo základnej školy rozviezol žiakov do jednotlivých obci a vrátil sa opäť do areálu školy v čo najkratšom čase.

Žiacky návrh riešenia:



Obr. 16 Grafické riešenie

Prameň: vlastný archív

Úloha 5:

V obci Hlboká a v obci Široká sú umiestnené sklady s automobilovým príslušenstvom. Z týchto skladov sa má rozviesť tovar do autodielní v obciach Krásno a Vysoká. Zo skladu v Hlbokej sa má odviezť 200 položiek tovaru a zo skladu v Širokej sa má odviezť

300 položiek tovaru. Tovar sa rozváža po 50 položkách a do každej autodielne sa má doviezť 250 položiek.
Cena za dopravu 50 položiek:
Z Hlbokej do Krásna ....100 eur
Z Hlbokej do Vysokej.......80 eur
Zo Širokej do Krásna........150 eur
Zo Širokej do Vysokej.......50 eur
Navrhnite najlacnejší spôsob prevozu.
Tabuľka 2 Plán riešenia úlohy – žiacka stratégia

	Hlboká (200položiek)	Široká (300 položiek)
Krásno	100 eur	150 eur
Vysoká	80 eur	50 eur

Prameň: vlastný návrh

1.možnosť:
Krásno: 4. 100 eur (doprava z Hlbokej) + 1.150 eur (doprava zo Širokej)
Vysoká 5.50 eur (doprava z Vysokej)
Spolu náklady pre túto možnosť rozvozu: 400 +150 + 250 = 800 eur

2.možnosť:
Krásno: 3.100 eur + 2. 150 eur
Vysoká: 4. 50 eur + 1.80 eur
Spolu náklady pre túto možnosť: 300 + 300 + 200 + 80 = 880 eur

3.možnosť:
Krásno: 2.100 eur + 3.150 eur
Vysoká: 3. 50 eur + 2. 80 eur
Spolu náklady pre túto možnosť rozvozu: 200+ 450 + 150 + 160 = 960 eur

4.možnosť:
Krásno: 1.100 eur + 4. 150 eur
Vysoká: 2.50 eur + 3. 80 eur
Spolu náklady pre túto možnosť rozvozu: 100 + 600 +100+ 240 = 1040 eur

5.možnosť:
Krásno: 5.150 eur
Vysoká: 1.50 eur + 4. 80 eur
Spolu náklady pre túto možnosť rozvozu: 750+ 370 = 1120 eur

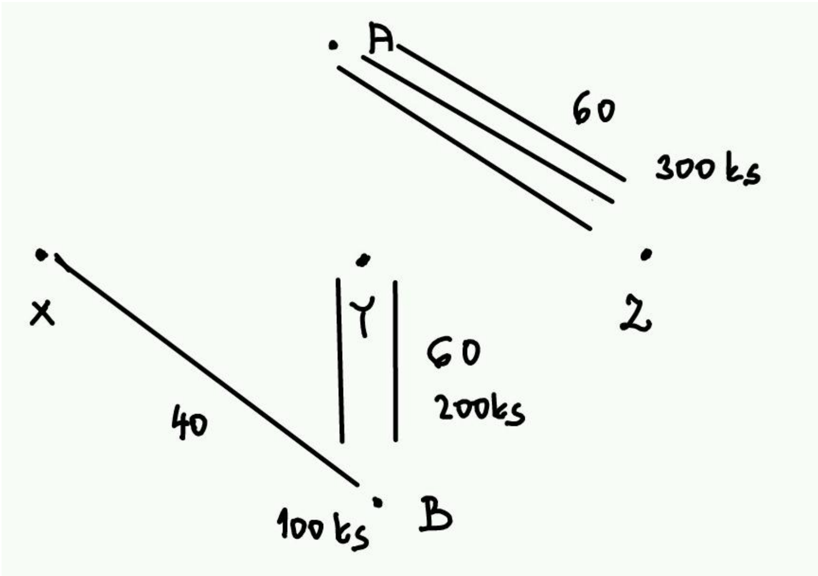
Najvýhodnejšia je prvá možnosť.

V tejto úlohe si žiaci uvedomili k akým veľkým rozdielom v nákladoch na dopravu môže dôjsť a ako je dôležité ovládať riešenie týchto problémových situácii v logistike.

Úloha 6:

Vypracujte najefektívnejší dopravný plán pre prepravu výrobkov v sériách po 100 kusoch z troch skladov X,Y,Z do dvoch podnikov A a B, ak sa do každého podniku má dopraviť 300 výrobkov tak, že zo skladov X,Y,Z odvezieme 100, 200 a 300 výrobkov. Dopravné náklady sú 20 eur z X do A, 60 eur z Y do A, 20 eur zo Z do A. Zo skladu X do podniku B - 40 eur, zo skladu Y do podniku B - 30 eur a zo skladu Z do podniku B - 50 eur.

Žiacky náčrt plánu:



Obr. 17 Schéma riešenia

Prameň: vlastný archív

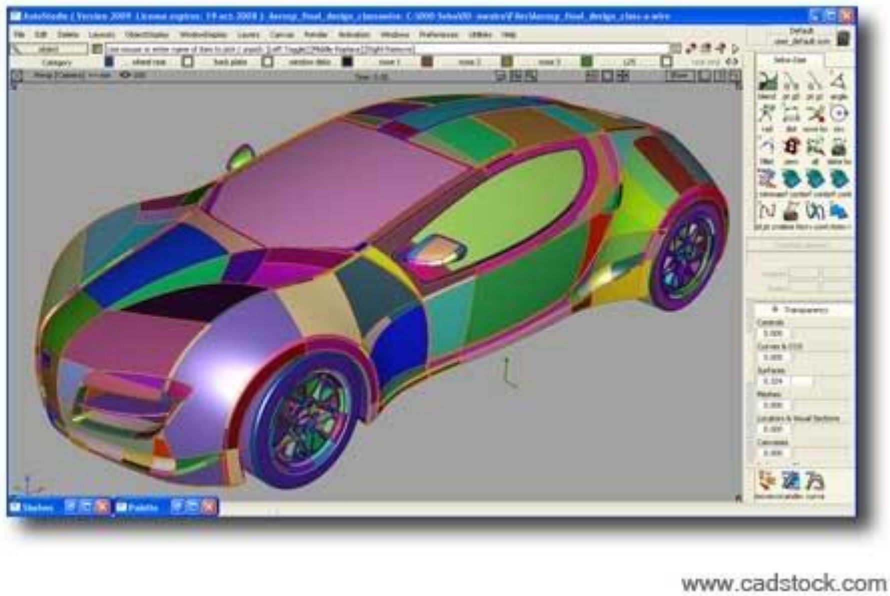
Beziérová krivka:

- parametrická krivka,
- umožňuje interaktívne vytváranie a modifikáciu svojho tvaru,
- bola definovaná aj pre automobilku Renault a to z dôvodov návrhov karosérie áut.

Beziérové krivky majú veľké využitie vo vektorovej grafike.

Vo vektorovej grafike je obrázok zložený z objektov skladajúcich sa z kriviek, kde jednotlivé objekty sú popísané matematicky. Objekt je popísaný počiatočným bodom, smerom, dĺžkou a jeho vlastnosťami ako farbou obrysovej čiary, farbou výplne, priehľadnosťou, tieňovaním, poradím, v akom bude vykreslený. Krivky spájajú jednotlivé kotvové body a môžu mať definovanú výplň (farebnú plochu alebo farebný prechod). Tieto čiary sa nazývajú Bézierove krivky. Francúzsky matematik Pierre Bézier vyvinul metódu, pomocou ktorej sme schopní popísať pomocou štyroch bodov ľubovoľný úsek krivky. Krivka je popísaná pomocou dvoch krajných bodov (kotvové body) a dvoch bodov, ktoré určujú tvar krivky (kontrolné body). Spojnica medzi kontrolným bodom a kotvovým bodom je dotyčnicou k popisovanej krivke. Základom vektorovej grafiky je matematika. Súbor obsahujúci vektorový obrázok sa skladá z definície súradnicového systému, z rovníc (s konkrétnymi hodnotami parametrov) opisujúcich jednotlivé objekty a z vlastností objektov – obrysovej čiary, výplne, tieňa, priehľadnosti, poradia vykreslenia.

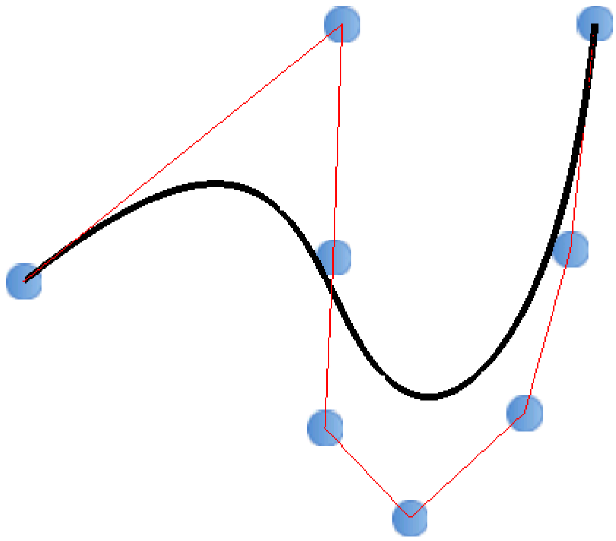
Žiaci skúmajú priebeh krivky prostredníctvom zmeny riadiacich bodov. Zaradením tejto krivky do výučby sme prepojili vzdelávanie počítačovej grafiky s matematikou. Odporúčam tieto úlohy hlavne pre odbory: informatik a propagačná grafika.



Obr. 18 Motivačný obrázok zo stránky cadstock –návrh karosérii pomocou Beziérovej krivky

Prameň: cadstok.com

Softvér, s ktorým sme pracovali: Bezier draw- je voľne stiahnuteľný.



Obr. 19 Žiacke modelovanie krivky pomocou 8 riadiacich bodov

Prameň: vlastný archív

6 NEŠTANDARDNÉ MATEMATICKÉ ÚLOHY V TEMATICKOM OKRUHU: LOGIKA

Podľa štátneho vzdelávacieho programu ISCED 3A v tematickom okruhu: logika, dôvodenie, dôkazy, žiak má získať vedomosti, zručnosti a ďalšie kľúčové kompetencie v takej miere, aby dokázal:

- určiť, či daná vetná konštrukcia je výrokom,
- tvoriť zložené výroky a zistiť štruktúru výrokov zložených z malého počtu jednoduchých výrokov pomocou logických spojok,
- vysvetliť rozdiel medzi implikáciou a ekvivalenciou,
- utvoriť negáciu výroku pomocou pravidiel pre negáciu základných zložených výrokov a negáciu jednoduchých kvantifikátorov,
- hľadať chyby v argumentácii a usudzovaní,
- v jednoduchých prípadoch vysloviť kontrapríklad všeobecných tvrdení,
- rozlíšiť nepodložené tvrdenie v prípade, že máte dostatok informácií,
- zovšeobecniť jednoduché tvrdenie,
- rozoznať priamy dôkaz a dôkaz sporom,
- rozumieť podstate uvedených dôkazov.

Úlohy, ktoré uverejňujem v tejto kapitole som aplikovala metódou EUR a to opäť v druhej fáze – uvedomenie si významu.

Úloha 1: prepis citátov do symbolického jazyka výrokovej logiky.

V danej vete určte jednoduché výroky, z ktorých je daný citát zložený. Rozhodnite sa, ktorou logickou spojkou dané jednoduché výroky spojíte:

- konjunkcia (logická spojka a zároveň),
- disjunkcia (logická spojka alebo),
- implikácia (logická spojka ak....tak...),
- ekvivalencia (logická spojka práve vtedy, keď).

Napríklad: Ak chceš byť múdrym, nauč sa správne pýtať. (J.K.Lavater)
A: Chceš byť múdrym.
B: Nauč sa pýtať.
Ak chceš byť múdrym, tak sa nauč pýtať.
Prepis do symbolického jazyka výrokovej logiky: $A \Rightarrow B$ (implikácia)
Žiacke riešenia:
Všetko je v mysli, tam všetko začína. (A. Einstein)
A: Všetko je v mysli.
B: Všetko tam začína.
Prepis do symbolického jazyka výrokovej logiky: $A \wedge B$ (konjunkcia)

Myslenie je najťažšia činnosť na svete a preto sa mu venuje tak málo ľudí. (Henry Ford)
A: Myslenie je najťažšia činnosť na svete.
B: Mysleniu sa venuje málo ľudí.
Prepis do symbolického jazyka výrokovej logiky: $A \wedge B$ (konjunkcia)

Ak nevieš opísať to čo robíš, tak nevieš čo robíš. (W.E. Deming)
A: Nevieš opísať čo robíš.
B: Nevieš čo robíš.
Prepis do symbolického jazyka výrokovej logiky: $A \Rightarrow B$ (implikácia)

Ak budete rybu súdiť podľa jej schopnosti vyšplhať sa na strom, tak budete celý život veriť tomu, že je hlúpa. (A. Einstein)
Prepis do symbolického jazyka výrokovej logiky: A⟹B (implikácia)
Úloha 2:
V nasledujúcich tvrdeniach nájdite jednoduché výroky a zapíšte zložený výrok symbolicky – pomocou logických spojok:

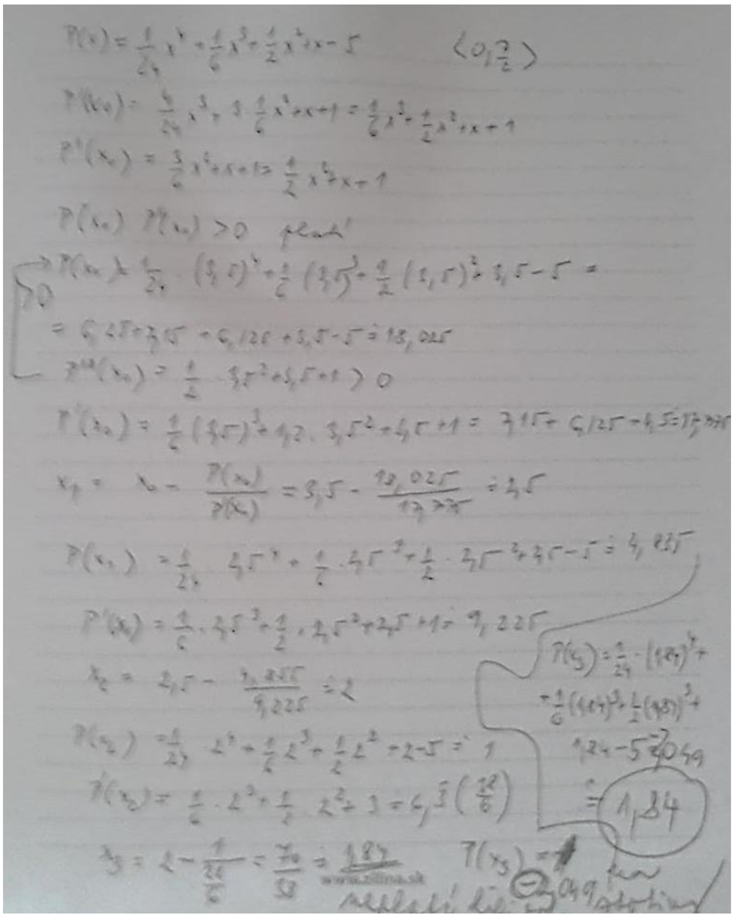
a.) 5. (3+6) = 5.9 = 45
b.) 2≤ 7
c.) -2 < 7< 10

Žiacke riešenie:

a.) (5.(3+6) = 5.9) ∧ (5.9 = 45)
b.) (2< 7) (2 =7)
c.) (-2< 7) ∧ (-2< 10)

V poslednej úlohe tejto kapitoly pridávam ukážku práce žiaka, v ktorej sa venoval určovaniu koreňov polynómu. Žiak pracoval samostatne - hľadal informácie a spôsoby riešenia úlohy a vybral si Newtonovu metódu. Úlohu riešil v rámci činnosti nášho klubu MatNad, ktorého členmi sú nadaní žiaci (členom je každý žiak, ktorý postúpil aspoň do celoslovenského kola matematickej alebo odbornej súťaže).

Nájdite koreň polynómu: P(x) = $\frac{1}{24}x^4 + \frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{2}x^2 + x - 5$ na intervale <0; 7/2>.



Obr. 20 Postup riešenia a ukážka práce žiaka

Prameň: vlastný archív

ZÁVER

Cieľom mojej práce je poskytnúť námet na tému: využitie neštandardných úloh vo výchovno-vzdelávacom procese. Aplikáciou tvorivých úloh vo výučbe rozvíjame nielen matematickú gramotnosť žiaka, ale aj jeho kľúčové kompetencie (kritické myslenie pri práci s informáciami, schopnosť používať matematiku pri riešení problémov z bežného života, schopnosť efektívne pracovať s informačnými technológiami a iné). Výsledky umiestnenia Slovenska v rámci hodnotenia PISA 2012[1] v oblasti: matematická gramotnosť poukazujú na nutnosť zaradenia týchto úloh do výučby. Mnohí žiaci stále považujú svoju schopnosť vyriešiť štandardnú matematickú úlohu za to najdôležitejšie a jediné, čo sa od nich očakáva. Pričom ich poznatky sú len povrchné a formálne. Ich poznanie sa pohybuje maximálne na hladine izolovaných modelov, nepoznajú vzťahy medzi objektmi a nemajú vytvorenú žiadnu sieť medzi izolovanými modelmi. Práve vtedy, v takto definovanej fáze výučby, uplatňujem neštandardnú úlohu, pričom zohľadňujem študijné zameranie žiakov, čo je jedným z predpokladov, aby žiaci úlohu považovali za zaujímavú. Týmto spôsobom „prevediem" žiakov do roviny generických modelov . V tejto rovine začínajú hľadať súvislosti a vzťahy medzi objektmi a využívajú svoje doterajšie skúsenosti s danou problematikou (napríklad: spomenú si na paralelne a sériové zapojenie vodičov z elektrických meraní a prepájajú tieto poznatky s teóriou pravdepodobnosti – príklad uvedený v práci). Žiak postupne prechádza do hladiny kryštalizácie nového poznatku.

V roku 1999 kolektív: Kurina, Štynclová a Cachová [3] uskutočnili v Čechách experiment. Deťom v materských škôlkach a v základných školách zadali rovnakú úlohu: dokresliť ten istý jednoduchý obrázok. Deti z materských škôl preukázali najvyššiu mieru kreativity a naopak deti zo základných škôl dokreslili obrázok len dvomi spôsobmi, pričom vychádzali z predstavy, že obrázok nakreslia tak, aby bola pani učiteľka spokojná. Kde sa stráca kreativita mladého človeka?

Možno práve prostredníctvom potenciálu, ktorý nám poskytujú neštandardné úlohy, malými krokmi, by sme mohli žiakov opäť „nasmerovať"" na cestu tvorivosti.

„ Vedieť- to je dočasné, ale rozumieť to je trvalé obohatenie ducha". (K. Čapek)[3]

ZOZNAM BIBLIOGRAFICKÝCH ZDROJOV

1. ADAMEK, R. a kolektív 2012. Moderná didaktická technika v práci učiteľa.1.vydanie. Učebný materiál k modulu 2. Ústav informácií a prognóz školstva, elfa. Košice. ISBN: 978-80-8086-135-3.
2. BRESTENSKÁ, B. a kolektív 2012. Premena školy s využitím informačných a komunikačných technológií -využitie IKT v danom predmete: spoločná časť. 1. vydanie. Ústav informácií a prognóz školstva, elfa. Košice. ISBN: 978-80-8086-143-8.
3. HEJNÝ, M., KURINA F. 2009. Dieťa, škola a matematika. 2. vydanie. Praha, vydavateľstvo Portál. 2009. ISBN: 978-80-7367-397-0
4. KALHOUS, Z. a kol. 2009. Školská didaktika. 2.vydanie. Praha, vydavateľstvo Portál. 2009. ISBN: 978-80-7367-571-4.
5. NOVÁČKOVÁ, Jana. Mýty ve vzdělávání : o škodlivosti některých zaběhaných představ o učení, škole a výchově : Výchova a vzdělávání pro 21. století : soubor článků, které vycházely v Lidových novinách od září 1998 do února 1999 (Souvis.). Kroměříž: Spirála, 2001. ISBN 80-901873-4-X.
6. PASCH, M. a kolektív 2005. Od vzdelávacieho programu k vyučovacej hodine – ako pracovať s kurikulom. 2.vydanie. Portál s.r.o. Praha. ISBN: 80-7367-054-2.
7. PODROUŽEK, L. Integrovaná výuka na základní škole. 1. vyd. Plzeň : Fraus, 2002. 96 s. ISBN 80-7238-157-1.

Internetové zdroje

1. Národná správa PISA 2009 [online]. [cit.23.02.2014]. Dostupné na: http://www.nucem.sk/sk/
2. Štátny vzdelávací program[online]. [cit.20.02.2014]. Dostupné na: http://www.statpedu.sk/sk/Statny-vzdelavaci-program/Statny-vzdelavaci-program
3. Talnet[online].2013. [citované 13.9.2013] Dostupné na: www.http://talnet.cz

ZOZNAM PRÍLOH

Bádateľská práca
Mat1-8 Povrch listů stromu

Obsah listu buka lesného

Peter L.

Obsah

Kľúčové slová

obsah rovinného útvaru, Lagrangeova metóda, určitý integrál

Anotácia

V práci autor popisuje stanovenie obsahu rovinného útvaru ohraničeného krivkou. Pomocou Lagrangeovej metódy stanovil predpis funkcie, ktorá ohraničuje daný útvar. Všetky predpoklady a údaje, ktoré použil vo výpočte, sú len produktom odhadu autora, nakoľko v aktuálnom ročnom období nie sú k dispozícií reálne materiály (list buka lesného).

Úvod

Vo svojej práci som sa snažil určiť obsah plochy listu buka lesného. Výsledok práce je len výsledkom mojich odhadov, pretože som nepracoval s reálnym materiálom. Listy buka lesného budú v štandardných rozmeroch v našich klimatických pomeroch – sever Slovenska, až v máji.
Všetky predpoklady, z ktorých som ďalej vychádzal vo výpočte sú teda len približné. Zaujímavé by bolo, vrátiť sa k obsahu tejto práce (k riešeniu tejto úlohy) o dva mesiace, keď už budú listy na stromoch a previesť ešte raz celý výpočet s reálnym materiálom. Následne porovnať oba výsledky a stanoviť v percentách presnosť odhadu.
V prvej kapitole práce sa zaoberám morfológiou listu buka lesného. Čerpal som zo zdrojov, ktoré sú voľne dostupné. V druhej kapitole opisujem spôsob stanovenia obsahu rovinného útvaru, ktorý je ohraničený krivkou. V ďalšej časti práce je uvedený samotný výpočet obsah listu buka lesného.
Téma, ktorej sa dotýka aj táto práca, je zaujímavá a všetci sa s ňou stretávame pri riešení reálnych problémov. Práve prepočítaním niekoľkých takýchto príkladov a porovnaním

daného obsahu s obsahom pravidelného rovinného útvaru môžeme získať presnejší odhad.

1 List buka lesného (Fagus sylvatica)

Vybral som si list buka lesného. Môj výber ovplyvnil hlavne fakt, že list je málo členitý. Ďalším dôležitým faktom je, že v tomto ročnom období nenájdem v prírode žiadne listy stromov. Preto som postupoval podľa obrázkov, ktoré sú uverejnené na internete. Ak by som chcel čakať na reálny list z buka lesného, v našej lokalite, musel by som počkať ešte aspoň do konca mája (podľa počasia).
Rozmery listu buka lesného:
- dĺžka listu: 4-10 cm,
- šírka listu: 3-7 cm,
- listová čepeľ je vajcovitá až v tvare elipsy.

Výška stromu: 30-50 m.

Odhad počtu konárov na jednom strome: 100 hlavných vetiev. Každá hlavná vetva sa ďalej košatí na približne na 5 konárov. Buk lesný má širokú rozložitú korunu. Na jednom konári sa nachádza približne 50 listov. Môj odhad počtu listov na jednom menšom strome – výška 30 metrov, je 25 000 listov.
Jeden list:
Východiská: dĺžka listu = 7 cm
Najširšie miesto: 6 cm
Vypočítam obsah jednej polovice listu a výsledok len násobím dvojkou.

2 Obsah útvaru ohraničeného krivkami

Existuje niekoľko matematických postupov, ktorých použitím získame obsah útvaru, ktorý je ohraničený krivkami.
Napríklad je to metóda obdĺžnikov. Zjednodušený princíp tejto metódy: rozdelím si rovinný útvar na dieliky, nad ktorými zakresľujem dvojicu obdĺžnikov. Jeden obdĺžnik na danom intervale má minimálny obsah – teda dotýka sa hornej krivky zvnútra a druhý obdĺžnik na tom istom intervale sa dotýka krivky zvonka – má maximálny obsah. Zmenšovaním intervalov sa dostávame postupne ku skutočnému – najpresnejšiemu obsahu útvaru ohraničeného dvoma krivkami. Tento postup som našiel pri definícii určitého integrálu.
Problém, ktorý som musel vyriešiť ako prvý: stanoviť predpis krivky, ktorá opisuje čepeľ polovice listu.
Použil som metódu: Lagrangeov interpolačný polynóm.

LAGRANGEOV POLYNÓM:

Lagrangeov polynóm, pomenovaný podľa Josepha Louisa Lagrangea, je v numerickej matematike interpolujúci polynóm pre danú množinu bodov v Lagrangeovom tvare. V roku 1779 ho objavil Edward Waring a v roku 1783 ho znovuobjavil Leonhard Euler.

$L(x) = \frac{(x-a_1)\dots(x-a_{-1})(x-a_{+1})\dots(x-a\ )}{(a\ -a_1)\dots(a\ \ -\ a_{-1}).(a-a_{+1})\dots(a\ -a\ )}$

Všeobecný tvar LAGRANGEOVEJ INTERPOLÁCIE:

$f(x) = l_x(x)\ .\ f(a_x)+E(x)$

$l_x(x)$ je Lagrangeov polynóm
a_x je tabuľková hodnota, ktorá je zadaná
E(x) je chyba aproximácie
u = index vo všetkých Lagrangeových polynómoch je počet bodov (tabuľkových hodnôt)
a_1 je prvý tabuľkový bod
a_u posledný tabuľkový bod

Konkrétne som si určil tri body: (0,0), (3,4), (7,0), ktoré patria krivke zobrazujúcej list a použil som nasledovný postup:

$l_0(x) = \frac{(x-x_1).(x-x_2)}{(x_0-x_1).(x_0-x_2)}$
$l_1(x) = \frac{(x-x_0).(x-x_2)}{(x_1-x_0).(x_1-x_2)}$
$l_2\ (x) = \frac{(x-x_0).(x-x_1)}{(x_2-x_0).(x_2-x_1)}$
$L\ (x_0, x_1, x_2\ ) = y_0\ .l_0(x) + y_1.\ l_1(x) + y_2.l_2\ (x)$

Týmto postupom získam krivku, ktorá ohraničuje spolu s osou x útvar, ktorého obsah chcem vypočítať.

3 Výpočet obsahu listu buka lesného

Stanovil som si tri body: $X_0 = [0,0]$, $X_1 = [3,4]$, $X_2 = [7,0]$

$$y_0.\,l_0(x) = \frac{(\mathrm{x}-\mathrm{x}_1\,).(\mathrm{x}-\mathrm{x}_2)}{(\mathrm{x}_0-\mathrm{x}_1).(\mathrm{x}_0-\mathrm{x}_2)} = 0 \dots \mathrm{l}_0(\mathrm{x}) = 0$$
$$y_1.\,l_1(x) = \frac{(-x^2\ +7x)}{3}$$
$$y_1.\,y_2.\,l_2(x) = 0.\,l_2(x) = 0$$
$$L\ \ (x_0, x_1, x_2) = y_0.\,l_0(x) + y_1.\,l_1(x) + y_2.\,l_2(x) = \frac{(-x^2\ +7x)}{3}$$

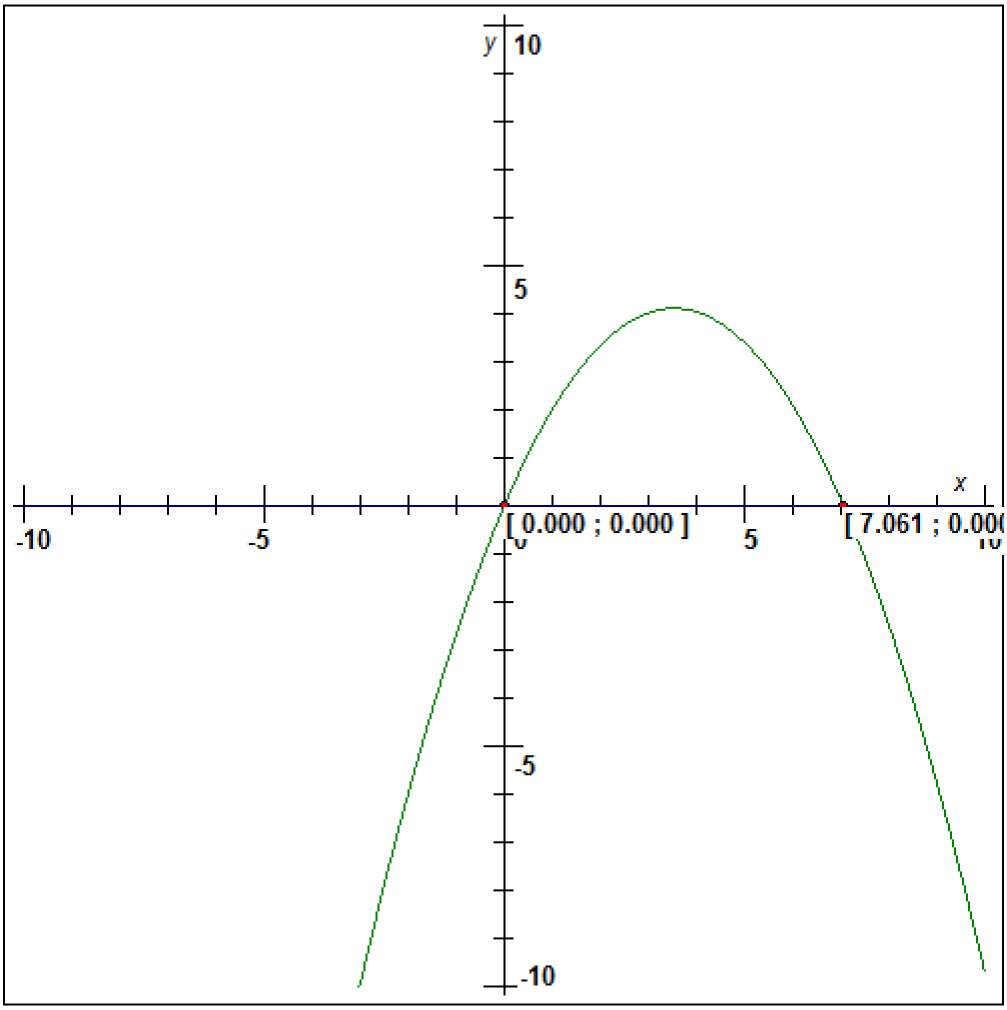
Zaujíma ma útvar ohraničený grafmi:

$$y = 0 \quad a \quad y = \frac{(-x^2+7x)}{3}$$

Prvá priamka je os x, vyznačená je modrou farbou a krivka – časť paraboly je znázornená zelenou farbou – viď obrázok 3.
Ďalej nasleduje výpočet obsahu tohto útvaru pomocou určitého integrálu.

$$\int_0^7 \frac{(-x^2+7\mathrm{x})}{3} = \frac{1}{3}.\ [\ \frac{-x^3}{3} + 7.\ \frac{x^2}{2}\ ]_0^7 = 19\ \mathrm{cm}^2$$

Odhad počtu listov je: 25 000. Vy počítaná hodnota je len polovica listu. Teda celý list má obsah: 38 cm^2.
Celkový obsah listov buka lesného podľa môjho odhadu je: 950 000 cm^2. V metroch štvorcových: 95 m^2 .



Obr.3 Grafy funkcií, ktoré ohraničujú plochu polovice listu

Prameň: vlastný návrh, program Funkce

V ďalšom kroku stanovím tento obsah pomocou viacerých bodov a stanovím rozdiel vo výpočte. Teda táto časť práce sa venuje presnejšiemu výpočtu, keďže si celkovo zvolím až deväť usporiadaných dvojíc, patriacich skúmanému objektu. Postupujem po tretinách listu.
1. časť: rozoberiem prvú časť z polovice listu: X_0 [0,0], X_1[1; 1,5], X_2[1,5; 2]

$l_0(x) = \frac{(x-x_1).(x-x_2)}{(x_0-x_1).(x_0-x_2)}$
$l_1(x) = \frac{(x-x_0).(x-x_2)}{(x_1-x_0).(x_1-x_2)}$
$l_2(x) = \frac{(x-x_0).(x-x_1)}{(x_2-x_0).(x_2-x_1)}$

$$l_0(x) = 0$$
$$l_1(x) = -3x^2 + 4{,}5\,x$$
$$l_2(x) = 2{,}67x^2 - 2{,}67\,x$$

$$l_0(x) + l_1(x) + l_2(x) = -0{,}33x^2 + 1{,}83x$$

$\int_0^{1,5}(-0{,}33x^2 + 1{,}83x)$ = 1,6875 cm^2 – polovica plochy listu

Celá časť listu, zodpovedajúca danému intervalu je : 3,375 cm^2.

2. druhá časť z polovice listu: X_0 [3;4], X_1[4; 3,8], X_2[5; 3]

$l_0(x) = \frac{(x-x_1).(x-x_2)}{(x_0-x_1).(x_0-x_2)}$

$l_1(x) = \frac{(x-x_0).(x-x_2)}{(x_1-x_0).(x_1-x_2)}$

$l_2(x) = \frac{(x-x_0).(x-x_1)}{(x_2-x_0).(x_2-x_1)}$

$$l_0(x) = 2x^2 - 18x + 40$$
$$l_1(x) = -3{,}8x^2 + 30{,}4x - 57$$
$$l_2(x) = 1{,}5x^2 - 10{,}5x + 18$$
$$l_0(x) + l_1(x) + l_2(x) = -0{,}3x^2 + 1{,}9x + 1$$

$\int_3^5(-0{,}3x^2 + 1{,}9x + 1)$ = 7,4 cm^2.

Celá časť listu, zodpovedajúca danému intervalu je 14,8 cm^2.

3. tretia časť z polovice listu: X_0 [5,5; 2,8], X_1[6; 2,5], X_2[7; 0]

$l_0(x) = \frac{(x-x_1).(x-x_2)}{(x_0-x_1).(x_0-x_2)}$

$l_1(x) = \frac{(x-x_0).(x-x_2)}{(x_1-x_0).(x_1-x_2)}$

$l_2(x) = \frac{(x-x_0).(x-x_1)}{(x_2-x_0).(x_2-x_1)}$

$$l_0(x) = 3{,}73x^2 - 48{,}49x + 156{,}66$$
$$l_1(x) = -5x^2 + 62{,}5x - 192{,}5$$
$$l_2(x) = 0$$
$$l_0(x) + l_1(x) + l_2(x) = -1{,}27x^2 + 14x - 35{,}84$$

$\int_{5,5}^{7}(-1{,}27\mathrm{x}^2 + 14\,\mathrm{x} - 35{,}84)$= 2,72 cm^2.

Celá plocha listu na danom intervale predstavuje hodnotu 5,44 cm^2.

Celá plocha listu je podľa presnejšieho výpočtu: 23, 615 cm^2.

Porovnanie výpočtov:

Rozdiel medzi prvým a druhým -presnejším výpočtom je značný, až 38%.

Ak som uvažoval o strome s 25 000 listami, tak celkový obsah bude predstavovať pri presnejšom určení obsahu jedného listu, hodnotu 590 375 cm^2 a teda 59, 0375m^2. Pri menej presnom určení obsahu listu, nám celková plocha listov stromu dá hodnotu: 95 m^2. Teda rozdiel je skutočne veľký.

Zaujímavé by bolo zvoliť ďalšie body a zistiť, či opäť by ten rozdiel bol väčší ako 30%. Môj predpoklad je, že už by bol miernejší.

Prvé riešenie teda považujem len za hrubý odhad. Postupným delením intervalu na menšie úseky sa blížim k presnejšej hodnote.

Avšak aj táto hodnota je stanovená len na základe odhadu rozmeru listu. Preto úlohu považujem za otvorenú, pokiaľ nebudem môcť pracovať s niekoľkými listami buka lesného.

Záver

Úloha, ktorú som riešil, bola celá postavená na odhade. Zaujímalo by ma, aký je presný môj odhad. Preto sa k úlohe vrátim počas letných prázdnin a budem počítať s reálnymi údajmi, so skutočným listom buka lesného. Odhadoval som aj počet listov na jednej vetve a tento údaj by som si chcel tiež overiť.
Keď porovnám obsah listu, ktorý mi vyšiel, teda 38 cm^2 s obsahom obdĺžnika, ktorý by mal dĺžku 7 cm a šírku 8 cm, teda 56 cm^2, uvedomím si rozdiel v ich obsahoch. Uvedomenie si rozdielu medzi presnejším a zjednodušeným – pravidelným útvarom mi môže pomôcť pri rozhodovaní v aplikačných úlohách, v ktorých nemusím vždy počítať s presnosťou na desiatky, prípadne môžem zaokrúhliť výsledok. Pri počítaní s 9 dvojicami bodov, ktoré patria danému listu, získavam ešte presnejšiu hodnotu, ktorá je značne odlišná od prvého výpočtu, až o 14, 385 cm^2 (38%). Lagrangeova metóda na stanovenie predpisu polynómu, ktorý najlepšie opisuje priebeh reálnej krivky je zaujímavá a stretol som sa s ňou prvý krát. Viem, že už som sa niekedy zamýšľal nad tým, ako vypočítať obsah nepravidelného útvaru, keď nepoznám predpis funkcií, ktoré útvar ohraničujú. Táto metóda je veľmi užitočná a poskytla mi ďalšiu „slobodu v riešení“ úloh.
Cieľom tejto práce bolo:
- naučiť sa používať Lagrangeovu metódu a aplikovať ju v problémovej úlohe,
- stanoviť na základe vstupných údajov – odhad a ďalej s ním pracovať,
- vytvoriť prvú časť materiálu, na ktorý budem nadväzovať v ďalších výpočtoch (takto rád pracujem- zaoberám sa určitou témou, skúmam ju, zaznačím si medzivýsledky a o istý čas sa k nej vrátim a snažím sa posunúť ďalej, keďže budem mať aj nový „výskumný materiál“),
- zbierať skúseností v oblasti matematickej práce.

Ďakujem všetkým, ktorí si našli čas na prečítanie mojej práce a napísali komentár k práci. Vaše rady mi umožnia pracovať lepšie- efektívnejšie, uvedomiť si chyby a učiť sa z nich. Pretože chyba v matematike je vždy výzva, ktorá nás, ak si ju uvedomíme a pracujeme na jej eliminácií, posúva ďalej.

Ďakujem

Bibliografické zdroje

4. KOHANOVÁ, I. 2012. Matematika 1. OrbisPictusIstropolitana Slovakia. Bratislava. 2012. ISBN: 9788081200625.
5. Dreviny [online].[cit. 20.3.2014]. Dostupné na www: http://www.dreviny.sk.
6. Talnet-knihovna [online].[cit. 29.3.2014]. Dostupné na www: http://www.talnet.cz.